Matemática 1 – Ejemplo 2do parcial

1) Estudiar si los vectores (1, -2, 1), (-2, 1, 1) y (1, 1, 0) son linealmente independientes.

Podemos calcular el determinante y si da distinto de cero son linealmente independientes.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(-2-1) -1(1-(-2)) = -3 -3 = -6 \text{ son l.i}$$

2) Dar tres puntos distintos del plano -x -y +2z = 0 y escribir a uno de ellos como combinación lineal de los dos restantes..

Buscamos dos vectores que verifiquen la ecuacion del plano y luego el tercero lo definimos como combinación lineal de este:

A = (-1, 1, 0) y B = (2, 0, 1) (Verificarlos)

La c.l la planteamos (x, y, z) = a(-1, 1, 0) + b(2, 0, 1)

$x = -a + 2b \rightarrow x = -y + 2z$ luego si a=1 y b=1, y = 1, z = 1, x = 1

$y = a \rightarrow y = a$ el tercer punto es C = (1, 1, 1)

$z = b \rightarrow z = b$

Matemática 1 – Ejemplo 2^{do} parcial

3) Sea S el plano de ecuación vectorial X = t(-1, 1, 0) + s(2, 0, -1).
a) Dar la ecuación cartesiana de S
b) Justificar por qué S es un subespacio de R^3 ¿Cuál es la dimensión de S?

a) Para la ecuación cartesiana necesitamos un vector normal al plano y como pasa por el origen sabemos que P = (0, 0, 0), luego planteamos el producto vectorial de los vectores directores del plano:

$$\begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = E_1(-1) -E_2(1) + E_3(-2) = (-1, -1, -2)$$

Luego la ecuación es X.N = P.N → -x -y -2z = 0

b) ...porque es un plano que pasa por el origen o conjunto de combinaciones lineales de dos vectores linealmente independientes o es un subespacio generado por dos vectores l.i

La dimensión es 2.

4) Dar la ecuación cartesiana del plano ortogonal a la recta X = t(-2, 1, 1) y que pasa por A = (-2, 3, 1).

Como el plano pedido es ortogonal a la recta, el vector (-2, 1, 1) es normal al plano, luego lo puedo tomar como N = (-2, 1, 1).

El punto P es el dado (-2, 3, 1).

Hay que hacer el producto escalar X.N = P.N → (x, y, z).(-2, 1, 1) = (-2, 3, 1).(-2, 1, 1)

Haciendo el producto nos queda:

$$-2x + y + z = 8$$

Matemática 1 – Ejemplo 2do parcial

5) Sea $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

a) Dar la dimensión del subespacio generado por los vectores filas de la matriz A.

b) Dar la dimensión del subespacio formado por las soluciones del sistema homogéneo

a) Debemos determinar cuantas filas independientes tiene la matriz.

En este caso podemos facilmente ver que:

$L_2 = -L_1$, luego L_2 es combinacion lineal de L_1.

$L_3 = 2.L_1$, luego L_3 es combinacion lineal de L_1.

Solo hay una fila linealmente independiente por lo tanto, la dimensión del subespacio generado por los vectores fila es 1.

b) El sistema homogeneo viene dado por A.X = 0, luego el número de variables (incógnitas) del sistema es n = 3, como el rango de la matriz de los coeficientes es r = 1, luego:

Dimensión del subespacio formado por las soluciones del sistema homogeneo = n – r = 2

Matemática 1 – Ejemplo 2^{do} parcial

6) Dar una base y dimensión del subespacio de soluciones del sistema lineal $x + y - 3z = 0$.

Necesitamos dos vectores linealmente independientes para formar el plano $x + y - 3z = 0$.

Estos vectores A y B tienen que verificar la ecuacion del plano, elegimos:

$A = (-1, 1, 0)$ y $B = (3, 0, 1)$ (verificar que son linealmente independientes)

Si queremos verificar que estos dos vectores forman el plano dado, podemos plantear el siguiente determinante (igualo a cero para que (x, y, z) sea combinación lineal de A y B):

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x(1-0) - y(-1-0) + z(0-3) = x + y - 3z = 0$$

La base es $\{(-1, 1, 0) ; (3, 0, 1)\}$ y la dimensión del subespacio de soluciones es 2 (por qué?).

7) Sabiendo que V, W que pertenecen a R^n son vectores ortogonales y $||V|| = 3$, calcular $V.(-2V + W)$.

Si V y W son ortogonales, entonces $V.W = 0$.

También sabemos que $V.V = ||V||^2$

Luego desarrolamos:

$$V.(-2V + W) = -2V.V + V.W = -2.||V||^2 + 0 = -2.9 = -18$$

Matemática 1 – Ejemplo 2do parcial

8) Dar una ecuación vectorial de la recta normal al plano $x + y + 2z = -2$ que pasa por $(1, -2, 3)$.

Un vector normal al plano es $(1, 1, 2)$ y como nos piden una recta normal al plano, podemos usar ese vector como director de la recta.

La ecuación vectorial es $X = P + tA = (1, -2, 3) + t(1, 1, 2)$

9) Hallar λ para que $(1, \lambda, 1)$, $(0, 1, 1)$ y $(2, 0, 2)$ sean linealmente dependientes.

Sabemos que si el determinante de los coeficientes de un sistema homogeneo es igual a cero indica que hay una dependencia lineal entre los vectores que lo forman, luego:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\lambda(0-2) + 1(2-2) = 0 \rightarrow 2\lambda = 0 \text{ luego } \lambda = 0$$

Otra forma:

$(1, \lambda, 1) = a(0, 1, 1) + b(2, 0, 2)$

$1 = 2b \quad \lambda = a \quad 1 = a + 2b$

$\frac{1}{2} = b \quad 1-2(1/2) = a = 0 \text{ y } \lambda = 0$

Matemática 1 – Ejemplo 2do parcial

10) Verificar que (1, -4, 1) pertenece al subespacio generado por (0, -1, 1) y (-1, 2, 1)

El espacio generado por (0, -1, 1) y (-1, 2, 1) lo podemos obtener de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

= x(-1 – 2) -y(0+1) + z(0-1) = -3x -y -z = 0

reemplazo (1, -4, 1) en el plano hallado, -3 + 4 -1 = 0

Vemos que verifica y, por lo tanto, pertenece al subespacio generado.

11) Sea S el plano de ecuación vectorial X = t(1, 1, 2) + s(-1,1, 0).
a) Dar la ecuación cartesiana de S
b) Justificar por qué S es un subespacio de R^3 ¿Cuál es la dimensión de S?

a) La ecuación cartesiana la podemos obtener haciendo:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

= x(0 – 2) -y(0+2) + z(1+1) = -2x -2y +2z = 0

(1, 1, 2) → -2 -2 +4 = 0   (-1, 1, 0) → 2 -2 + 0 = 0 (Verifican)

b) S esta formado por dos vectores linealmente independientes (verificarlos) de R^3, y la dimensión es dos.

Matemática 1 – Ejemplo 2do parcial

12) Dar una base y dimensión del subespacio de soluciones del sistema lineal:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

Calculamos el rango de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad L_2 = 2L_1 - L_2 \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

El rango es 2, luego 3 – 2 = 1 (dimensión del subespacio de soluciones)

La base es un vector, lo obtengo haciendo:

$-y + z = 0 \rightarrow y = z$, reemplazo en la primer fila: $x - z + z = 0 \rightarrow x = 0$, luego si $z = 1$, el vector es (0, 1, 1). Luego la base B = {(0, 1, 1)}

13) El conjunto formado por los siguientes vectores {(1,1,1), (0, 1, 2), (0,1,3)} es linealmente dependiente o independiente?

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes para ver si es 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1-2) = -1$$ luego los vectores son linealmente independientes.

Matemática 1 – Ejemplo 2do parcial

14) Dado el siguiente conjunto de vectores {(1,-2,1),(-2,4,-2)}, decir si:
a) Forma una base y tiene dimensión 2?
b) Genera una recta de R^3?

a) Para ver si es una base planteamos::

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{vmatrix} \quad L_2 = 2L_1 - L_2 \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Los vectores no son linealmente independientes, por lo tanto no forman una base y la dimensión no es 2.

b) Si se puede generar una recta de R^3, X = t(1, -2, 1)

15) Cuál es el valor de k para que el siguiente conjunto {(1,-1, 2), (0, k, 3), (1, 0, 5)} sea base de R^3?

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes para ver que valor de k lo hace 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & k & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1(5k-0) – 0(\ ) + 1(-3 – 2k) = 5k -3 -2k = 0 \rightarrow k = 1$$

Luego para que el conjunto dado sea base de R3, $k \neq 1$

Matemática 1 – Ejemplo 2do parcial

16) Decir si el vector (-1,3,-5) es combinación lineal del siguiente conjunto de vectores: {(1, -1, 0) ,(0, 2, -1) ,(2, 0, 3)}.

Planteamos la combinación lineal de la siguiente forma:

$$(-1, 3, -5) = a(1, -1, 0) + b(0, 2, -1) + c(2, 0, 3)$$

$$\begin{array}{l} -1 = a + 2c \\ 3 = -a + 2b \\ -5 = -b + 3c \end{array} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1(6-0) -0 +2(1 -0) = 6 + 2 = 8$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -5 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{8} = \frac{8}{8} = 1 \qquad b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}}{8} = \frac{16}{8} = 2 \qquad c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{vmatrix}}{8} = \frac{-8}{8} = 1$$

Luego para a=1, b=2 y c=-1, el vector es combinación lineal de los otros 3.

Verificación:

$$1(1, -1, 0) + 2(0, 2, -1) -1(2, 0, 3) = (-1, 3, -5) \text{ Verifica.}$$

Matemática 1 – Ejemplo 2^{do} parcial

17) Dar dos bases del subespacio de R^3 dado por $x-y+2z=0$

Para obtener una base del plano, buscamos dos vectores de R3 que pertenezcan al mismo:

$A = (1, 1, 0) \rightarrow 1 - 1 + 0 = 0$ (verifica)

$B = (-2, 0, 1) \rightarrow -2 - 0 + 2 = 0$ (verifica)

Luego debemos chequear que ambos vectores sean linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad L_2 = 2L_1 + L_2 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

El rango es 2, por lo que son l.i.

Una base es $B_1 = \{(1, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$

La otra base la obtenemos de estos vectores tomando vectores paralelos a los mismos, por ejemplo, $A' = -1(A) = (-1, -1, 0)$ y $B' = -2(-2, 0, 1) = (4, 0, -2)$

La otra base pedida es $B_2 = \{(-1, -1, 0), (4, 0, -2)\}$

Matemática 1 – Ejemplo 2^{do} parcial

18) Dado el siguiente conjunto de vectores {(1,-2,1),(2,-4,-2)}, decir si:
a) Forma una base y tiene dimensión 2?
b) Genera una recta de R^3?

a) Para ver si es una base planteamos::

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{vmatrix} \quad L_2 = 2L_1 - L_2 \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Los vectores son linealmente independientes, por lo tanto forman una base y la dimension es 2.

b) Como la dimensión es 2, los vectores no pueden generar una recta de R^3.

19) Sean A = (-1, 0, 1) y B = (1, 2, 1), calcular ||A x B || - A.B

Calculamos A x B

$$\begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ = E1(0-2) -E2(-1-1) +E3(-2-0) = (-2, 2, -2) \\ \text{Luego } ||A \times B|| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 2.\sqrt{3} \end{array}$$

A.B = -1 +0 + 1 = 0 reemplazando todo en : $||A \times B|| - A.B = 2.\sqrt{3}$

Matemática 1 – Ejemplo 2do parcial

20) Investigar si las rectas $X = (1, 1, 3) + t(2, -1, 1)$ y $X = (1, 0, 3) + t(1, 1, -1)$ son paralelas u ortogonales.

Para resolver el ejercicio hacemos:

a) si son ortogonales, el producto escalar de los vectores directores es igual a cero, luego:

$(2, -1, 1) . (1, 1, -1) = 2 -1 -1 = 0$, por lo tanto las rectas son ortogonales.

21) Estudiar si la recta $X = (0, -1, 1) + t(1, -1, 1)$ está contenida en el plano $y + z = 0$.

Escribimos la ecuación paramétrica de la recta:

$x = t$

$y = -1 - t$

$z = 1 + t$ reemplazamos en $y + z = -1 - t + 1 + t = 0$ para todo t, por lo tanto

la recta esta contenida en el plano.

Matemática 1 – Ejemplo 2do parcial

22) Hallar una base y calcular la dimensión del subespacio de soluciones del siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned} -2x + y - z &= 0 \\ -2x - 2y + z &= 0 \\ x + 5y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} 1 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 11 & -7 \\ 0 & 8 & -5 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Luego el rango de la matriz es 3.

La dimensión del subespacio de soluciones es 3 – 3 = 0.

Esto ocurre porque el sistema homogeneo tiene como única solucion la trivial (0, 0, 0). Luego la base del subespacio de soluciones es B = (0, 0, 0)