Tema 2

1	2	3	4	5	6	7	Calificación	Condición

Apellido y Nombre: ....

DNI: .... Materia: ....

Comisión: .... Docentes: ....

Elementos de Matemática (10300)/Introducción a la Matemática (14025)
SEGUNDO PARCIAL - 10/06/2023

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + 2x - 8$

   a) Graficar f indicando las coordenadas del vértice y las intersecciones con los ejes cartesianos.

   b) A partir del gráfico obtenido, hallar el conjunto solución de la inecuación $f(x) > 0$, es decir, el conjunto de positividad de f.

a) Para graficar f necesitamos encontrar:

- Vertice
- Raíces.
- ordenada al origen

} Intersecciones con las ejes.

- Vértice $a = 1$ $b = 2$ $c = -8$

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2.1} = -\frac{2}{2} = -1$

$y_v = f(x_v) = f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 8 = 1 - 2 - 8 = -9$

$V = (-1, -9)$

- Raíces Resolvemos $f(x) = 0$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{(+2)^2 - 4.1.(-8)}}{2} =$

$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2}$

$x_1 = \frac{-2+6}{2} = 4$

$x_2 = \frac{-2-6}{2} = 12$

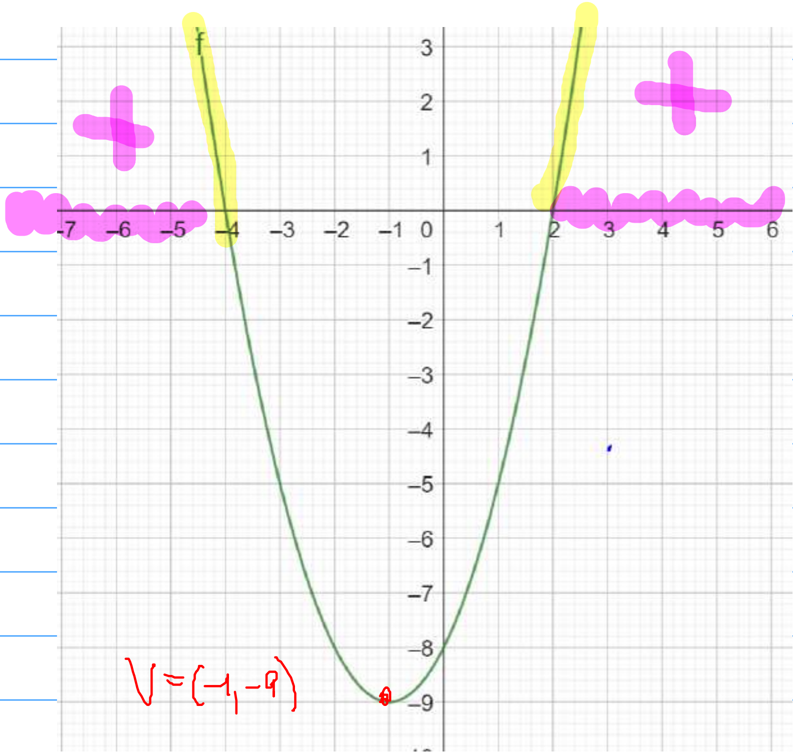
Intersección con el eje x

$(-4, 0)$

$(2, 0)$

a) Ordenada al origen $f(0) = 0^2 + 2.0 - 8 = -8$

Int. eje y : $(0, -8)$



b) $C^+(f) = (-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$

(Son Todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0$)

2. Considerar los polinomios $P(x) = x^5 + 2x^2 + ax - 9$ y $Q(x) = x + 1$ $(a \in \mathbb{R})$.

a) Hallar el valor de a tal que P sea divisible por Q.

b) Sean R un polinomio de grado 8 y T un polinomio de la forma $T(x) = Q(x).(P(x) + 3R(x))$, determinar el grado de T (P y Q son los polinomios dados).

a) Como P debe ser divisible por Q entonces el resto de dividir a P por Q es CERO. Esto quiere decir que, por el Teorema del resto que $P(-1) = 0$

$$P(-1) = 0$$
$$(-1)^5 + 2\cdot(-1)^2 + a\cdot(-1) - 9 = 0$$
$$-1 + 2 - a - 9 = 0$$
$$-8 = a$$

b)

$$T(x) = \underbrace{Q(x)}_{\text{grado } 1.} . \underbrace{\left(P(x) + \underbrace{2.R(x)}_{\text{grado}} \right)}$$

Al sumar un polinomio de grado 5, el grado de $P + 2R$ sigue siendo 8

el grado del producto de dos polinomios es igual a la suma de los grados, entonces el grado de T es $1 + 8$

$$gr(T) = 9$$

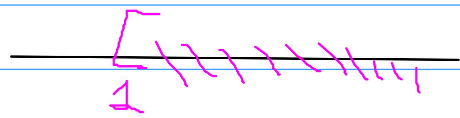
3. Dada la siguiente ecuación: $2 \cdot \sqrt{3x-3}+1=5$ Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. **Justficar.**

   a) El dominio de la ecuación es $\mathbb{R}-\{1\}$.

   b) La ecuación tiene una única solución y es un número entero.

a) Calculamos el dominio de la ecuación pidiendo que:

$$3x-3 \geq 0$$
$$3x \geq 3$$
$$x \geq \frac{3}{3}$$
$$x \geq 1$$



$$\text{Dom} = [1, +\infty)$$

La afirmación es FALSA.

b) Resolvemos la ecuación

$$2 \cdot \sqrt{3x-3} + 1 = 5$$
$$2 \cdot \sqrt{3x-3} = 5-1$$
$$\sqrt{3x-3} = \frac{4}{2}$$
$$\underbrace{\sqrt{3x-3}}_{\geq 0} = \underbrace{2}_{\geq 0}$$
$$\left(\sqrt{3x-3}\right)^2 = (2)^2$$
$$3x-3=4$$
$$x = \frac{4+3}{3}$$
$$x = \frac{7}{3} \notin \mathbb{Z}$$

La afirmación es FALSA. $x=\frac{7}{3} \in \mathbb{Q}$

4. Considerar el polinomio $P(x) = 2x^3 + 2x^2 - 6x - 6$.

a) Hallar todas las raíces reales de P y factorizarlo.

b) ¿Todas las raíces de P son números racionales? Justificar.

a) Usando el Teorema de Gauss.

$p = \{\text{divis. de } -6\} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3 \pm 6\}$

$q = \{\text{divis. de } 2 = \{\pm 1, \pm 2\}$

$\frac{p}{q} = \{\text{posibles raíces de } P\} = \{\pm 1, \pm \frac{1}{2}; \pm 2, \pm \frac{3}{2}; \pm 3\}$

$P(-1) = 2(-1)^3 + 2(-1)^2 - 6(-1) - 6 = -2 + 2 + 6 - 6 = 0$

$\Rightarrow \quad P(x) = (x+1) . \underbrace{C(x)}$

lo hallamos dividiendo a P por $(x+1)$

	2	2	−6	−6
−1		−2	0	+6
	2	0	−6	0

$C(x) = 2x^2 - 6$

$P(x) = (x+1)\underbrace{(2x^2 - 6)}$ Buscamos raíces.

$2x^2 - 6 = 0$

$2x^2 = 6$

$x^2 = 3$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{3}$

$|x| = \sqrt{3}$ $\quad x = \sqrt{3}$, $\quad x = -\sqrt{3}$

$\boxed{\text{Raíces de } P = \{-\sqrt{3}, \ 1, \sqrt{3}\}}$

Factorización

$\boxed{P(x) = 2(x+1)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}$

b) No Todas las raíces de P son racionales

$x = \sqrt{3}$ y $x = -\sqrt{3}$ son raíces IRRACIONALES.

5. Dada la siguiente ecuación: $\dfrac{x(x+2)}{x^2-4}+3=3$. Hallar el dominio y el conjunto solución.

a) Dominio: Pedimos que $x^2-4 \neq 0$

$$x^2-4=0$$
$$x^2=4$$
$$\sqrt{x^2}=\sqrt{4}$$
$$|x|=2$$

$x=2$ ó $x=-2$

$$\text{Dominio}=\mathbb{R}-\{-2,2\}.$$

Conjunto solución

$$\frac{x(x+2)}{x^2-4}+3=3$$
$$\frac{x(x+2)}{x^2-4}=3-3$$
$$x(x+2)=0$$
$$x(x+2)=0\cdot(x^2-4)$$
$$x\cdot(x+2)=0$$

$\boxed{x=0}$ $\in$ Dom ó $x+2=0$, $\boxed{x=-2}$ $\notin$ Dom

$$S=\{0\}$$

6. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función cuya fórmula es $f(x) = \log_3(x-5) - 1$. Hallar el dominio y , si es posible, las intersecciones con el eje x , con el eje y y la ecuación de la asíntota. A partir de lo obtenido, graficar f.

Dominio

$$x - 5 > 0$$

$$x > 5 \qquad \text{Dom}(f) = (5, +\infty)$$

• **Asíntota vertical** $\quad x = 5$

• **Intersección eje x**

$$f(x) = 0$$

$$\text{Log}_3(x-5) - 1 = 0$$

$$\text{Log}_3(x-5) = 1$$

$$3^{\log_3(x-5)} = 3^1$$

$$x - 5 = 3$$

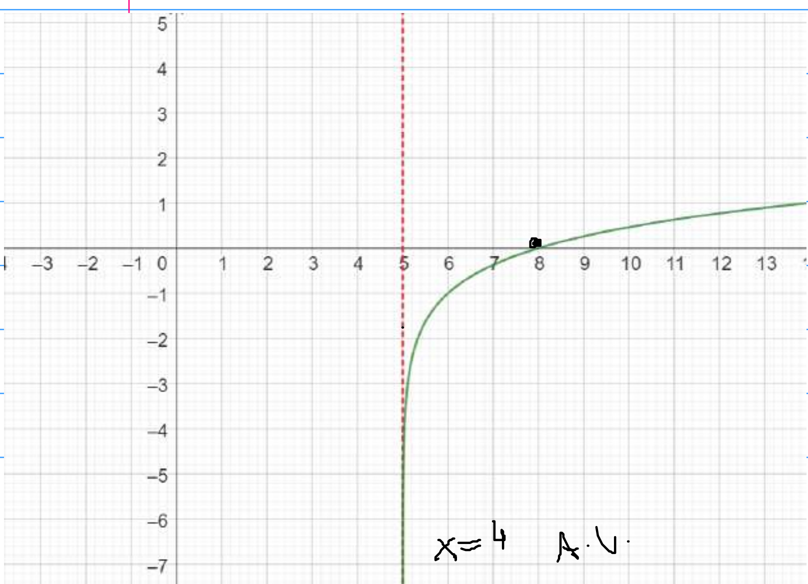
$$x = 3 + 5$$

$$x = 8 \quad \rightarrow (8, 0)$$

• **Intersección eje y**

No es posible calcular $f(0)$ porque $0 \notin \text{Dom}(f)$

$$f(0) = \text{Log}_3(0-5) - 1 = \underbrace{\log_3(-5)}_{\text{No existe}} - 1$$



(Base > 1, f es estrict. creciente)

7. Dada la siguiente ecuación: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+5=7$. Hallar el dominio y el conjunto solución.

Dominio: $Dom = \mathbb{R}$ (x está en el exponente por lo tanto está bien definido para todo $x \in \mathbb{R}$)

Conjunto Solución

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+5=7$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}=7-5$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}}_{>0}=\underbrace{2}_{>0}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}\right)=\log_{\frac{1}{2}}(2)$$

$$x-1=-1$$

$$x=0 \in Dom$$

$$S=\{0\}$$