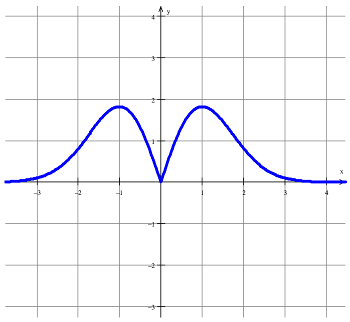
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS DIVISIÓN MATEMÁTICA

PRIMERA EVALUACIÓN INFORMATIVA DE **ANÁLISIS MATEMÁTICO I** **06 - 10 - 2017**

APELLIDO Y NOMBRES...LEGAJO.......................................	**1**

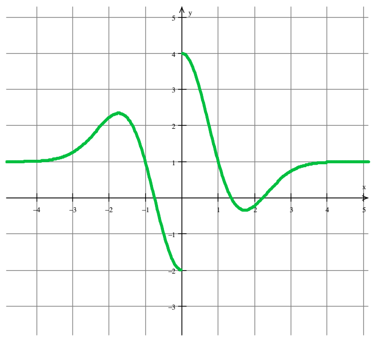
1. La gráfica de la izquierda representa una $f(x)$. Se pide:

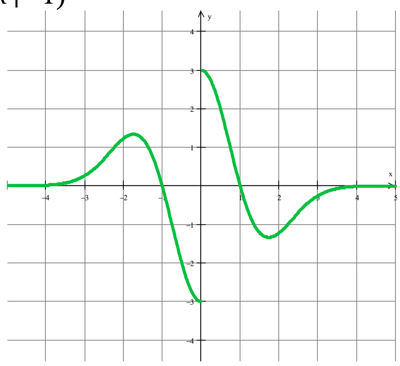


a) ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a su derivada? Justificar la elección.

b) Reconocer la otra gráfica

c) Construir la gráfica de $f(|x|-1)$





a) La gráfica de la derecha corresponde a $f'(x)$

b) La gráfica de la izquierda corresponde a $f'(x)+1$

c) Para la construcción debe hacerse: $f(x-1) \rightarrow f(|x|-1)$

1. Verificar que la recta $y=-x$ es tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^3-6x^2+8x$. Hallar el punto de contacto.

Imponiendo que las pendientes sean iguales, se buscan puntos de la curva de pendiente -1.

$f'(x)=3x^2-12x+8$; $3x^2-12x+8=-1 \Leftrightarrow x=1$ o $x=3$. Se buscan también las ordenadas calculando $f(1)=3$; $f(3)=-3$. Se obtienen los puntos: $P_1=(1,3)$.; $P_2=(3,-3)$.

Respuesta: Como debe pertenecer a la recta $y=-x$, el punto de contacto es $P_2=(3,-3)$.

2. Realizar el estudio completo de la siguiente función y trazar su gráfica: $f(x)=\dfrac{2+\log x}{x}$

Dominio: $x>0$. No tiene simetría. Intersecciones y signo:

$f(e^{-2})=0$; $f(x)<0 \Leftrightarrow 0<x<e^{-2}$; $f(x)>0 \Leftrightarrow x>e^{-2}$

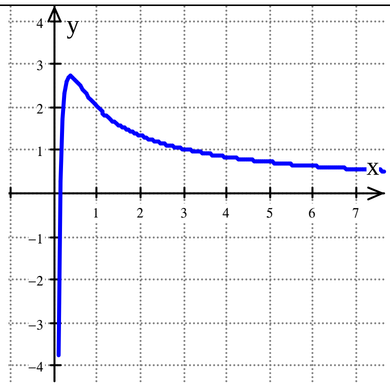
Asíntotas:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2+\log x}{x}=\frac{-\infty}{0}=-\infty.$$ Hay asíntota vertical $x=0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2+\log x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=0.$$ Hay asíntota horizontal $y=0$

$$f'(x)=\frac{1-2-\log x}{x^2}=\frac{-1-\log x}{x^2}; \quad f'(x)=0 \Leftrightarrow x=e^{-1}$$

Estudiando el signo de $f'(x)$ se muestra que $x=e^{-1}$ es punto de máximo y $M=e$



3. Trazar la gráfica de una función que verifique las siguientes condiciones:
Está definida para $|x| \neq 2$; es una función **impar**,
$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \infty$, tiene asíntota $y = x - 2$ para $x \to \infty$, $f'(0) = 0$, $f'(3) = 0$

Este se explica en clase: Tener en cuenta que la asíntota para $x \to -\infty$ tiene ecuación $y = x + 2$.

Para los puntos de la gráfica en correspondencia a los cuales se indica que la derivada es nula hay que poner atención en dibujar de modo que tengan tangente horizontal.

5. Hallar los valores de b y c para los cuales la función f resulta continua en IR.

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3, \text{ si } 2 < x < 4 \\ -x^2 + bx + c, \text{ si } |x - 3| \geq 1 \end{cases}$$

Escribir la función obtenida.

Se imponen las condiciones de continuidad en ambos extremos del intervalo [2, 4], de modo de igualar los límites derecho e izquierdo en cada punto con el correspondiente valor de la función. Se obtiene un sistema lineal en las incógnitas b y c.

$$\begin{cases} 1 = -4 + 2b + c = f(2) \\ -1 = -16 + 4b + c = f(4) \end{cases} \qquad \begin{cases} 2b + c = 5 \\ 4b + c = 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 5 \\ c = -5 \end{cases}$$

La función buscada es $f(x) = \begin{cases} -x + 3, \text{ si } 2 < x < 4 \\ -x^2 + 5x + -5, \text{ si } |x - 3| \geq 1 \end{cases}$

6. Hallar el Máximo y mínimo absolutos de la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ en el intervalo $[-3,1]$.

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}} \quad ; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in (-3, 1)$$

No existe $f'(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \notin (-3, 1) \\ x = -2 \in (-3, 1) \end{cases}$

Se evalúa la función en los puntos donde puede asumir el Máximo o el mínimo:

$f(-3) = \sqrt[3]{9 - 4} = \sqrt[3]{5}$; $f(-2) = \sqrt[3]{4 - 4} = 0$; $f(0) = \sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4}$; $f(1) = \sqrt[3]{1 - 4} = -\sqrt[3]{3}$

Respuesta: $M = \sqrt[3]{5}$ en $x = -3$. $m = -\sqrt[3]{4}$ en $x = 0$.

7. Mostrar que la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ verifica el teorema de Lagrange en el intervalo [1,2] y encontrar los puntos c a los que se refiere la tesis del Teorema.

La función dada es obviamente continua y derivable en el intervalo dado.
Resulta de una operación de cociente entre dos polinomios, que son funciones continuas, pero el denominador se anula para $x = 0 \notin [1, 2]$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x}; \quad f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

Buscamos c tales que $f'(c) = \dfrac{c^2 + 1}{c^2} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow 3c^2 = 2c^2 + 2 \Rightarrow c^2 = 2$

Respuesta: El punto buscado es $c = \sqrt{2} \in (1, 2)$

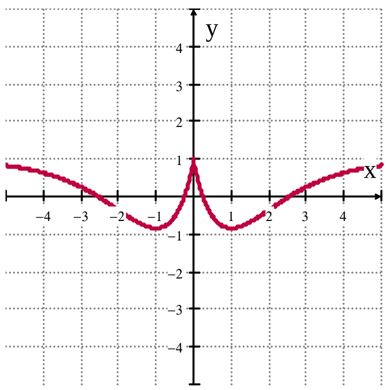
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LUJÁN

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS — DIVISIÓN MATEMÁTICA

PRIMERA EVALUACIÓN INFORMATIVA DE **ANÁLISIS MATEMÁTICO I** **06 -10 - 2017**

APELLIDO Y NOMBRES...LEGAJO..	**2**

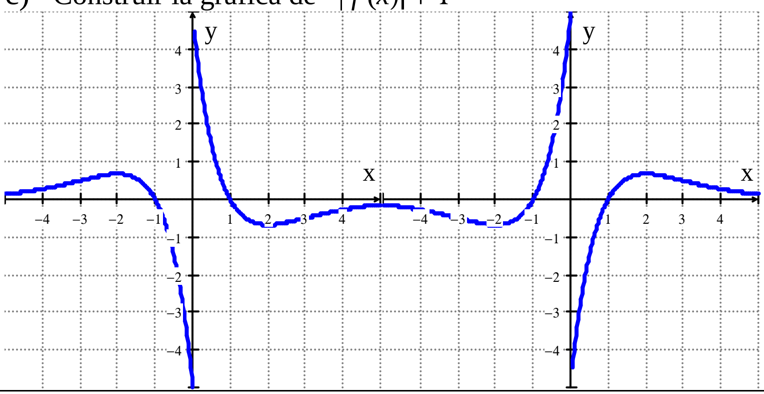
1. La gráfica de la izquierda representa una $f(x)$. Se pide:



a) ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a su derivada? Justificar la elección.

b) Reconocer la otra gráfica

c) Construir la gráfica de $|f(x)| + 1$



d) La gráfica de la derecha corresponde a $f'(x)$

e) La gráfica de la izquierda corresponde a $-f'(x)$

f) Para la construcción debe hacerse: $|f(x)| \rightarrow |f(x)| + 1$

2. Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ que sean paralelas a la recta $x - 2y = 2$.

$$f'(x) = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2};$$

$$\frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x+1)^2 = 4 \Leftrightarrow x = 1,\ x = -3$$. Puntos de contacto: $P_1 = (1, 0)$.; $P_2 = (-3, 2)$.

y las respectivas rectas tangentes son: $r_1 \quad y = \dfrac{1}{2}(x-1)$ y $r_2: \quad y - 2 = \dfrac{1}{2}(x+3)$.

3. Realizar el estudio completo de la siguiente función y trazar su gráfica: $f(x) = \dfrac{3 + \log x}{x}$

Dominio: $x > 0$. No tiene simetría. Intersecciones y signo:

$f(e^{-3}) = 0$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < e^{-3}$; $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > e^{-3}$

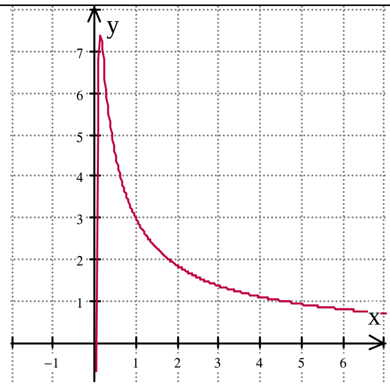
Asíntotas:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3 + \log x}{x} = \frac{-\infty}{0} = -\infty.$$ Hay asíntota vertical $x = 0$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3 + \log x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$ Hay asíntota horizontal $y = 0$

$$f'(x) = \frac{1 - 3 - \log x}{x^2} = \frac{-2 - \log x}{x^2}; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-2}$$

Estudiando el signo de $f'(x)$ se muestra que $x = e^{-2}$ es **punto** de máximo y $M = e^{2}$



4. Trazar la gráfica de una función que verifique las siguientes condiciones:
Está definida para $|x| \neq 2$. Es una función **par**, no derivable en $x = 0$,
$\lim_{x \to 2} f(x) = \infty$, tiene asíntota $y = x - 2$ para $x \to \infty$, $f'(3) = 0$.

Este se explica en clase: Tener en cuenta que la asíntota para $x \to -\infty$ tiene ecuación $y = -x - 2$.

Para los puntos de la gráfica en correspondencia a los cuales se indica que la derivada es nula hay que poner atención en dibujar de modo que tengan tangente horizontal.

5. Hallar los valores de b y c para los cuales la función f resulta continua en IR.

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ si } 1 < x < 3 \\ x^2 + bx + c, \text{ si } |x-2| \geq 1 \end{cases}$$

Escribir la función obtenida.

Se imponen las condiciones de continuidad en ambos extremos del intervalo [1, 3], de modo de igualar los límites derecho e izquierdo en cada punto con el correspondiente valor de la función. Se obtiene un sistema lineal en las incógnitas b y c.

$$\begin{cases} 2 = 1 + b + c = f(1) \\ 4 = 9 + 3b + c = f(3) \end{cases} \qquad \begin{cases} b + c = 1 \\ 3b + c = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -3 \\ c = 4 \end{cases}$$

La función buscada es $f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ si } 1 < x < 3 \\ x^2 - 3x + 4, \text{ si } |x-2| \geq 1 \end{cases}$

6. Hallar el Máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 9}$ en el intervalo $[-1, 4]$.

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-9)^2}} \; ; \qquad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in (-1, 4)$$

No existe $f'(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \in (-1, 4) \\ x = -3 \notin (-1, 4) \end{cases}$

Se evalúa la función en los puntos donde puede asumir el Máximo o el mínimo:

$f(-1) = \sqrt[3]{1-9} = -2$; ; $f(0) = \sqrt[3]{-9} = -\sqrt[3]{9}$; $f(3) = \sqrt[3]{9-9} = 0$; $f(4) = \sqrt[3]{16-9} = \sqrt[3]{7}$

Respuesta: $M = \sqrt[3]{7}$ en $x = 4$. $m = -\sqrt[3]{9}$ en $x = 0$.

7. Mostrar que la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ verifica el teorema de Lagrange en el intervalo [1,2] y encontrar los puntos c a los que se refiere la tesis del Teorema.

La función dada es obviamente continua y derivable en el intervalo dado.
Resulta de una operación de cociente entre dos polinomios, que son funciones continuas, pero el denominador se anula para $x = 0 \notin [1, 2]$

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} \; ; \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

Buscamos c tales que $f'(c) = \dfrac{c^2-1}{c^2} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow c^2 = 2c^2 - 2 \Rightarrow c^2 = 2$

Respuesta: El punto buscado es $c = \sqrt{2} \in (1, 2)$