APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

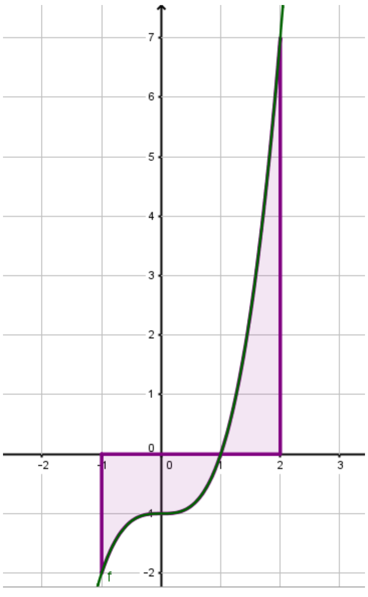
Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 40'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Calcular el área de la región comprendida entre el gráfico de $f(x) = x^3 - 1$, $x = -1$ y $x = 2$.



Como el área a calcular está formada por una región por debajo del eje de abscisas y otra por encima del mismo, debemos determinar el valor de x donde la gráfica corta dicho eje. Es decir, determinar el valor de x para el cual $f(x) = 0$.

Verificamos que $x = 1$ es el punto de intersección de la gráfica con el eje de abscisas, ya que $f(1) = 1^3 - 1 = 0$

Entonces el área a calcular es:

$$A = -\int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx$$

Por otra parte,

$$\int f(x)dx = \int (x^3 - 1)dx \Rightarrow \int f(x)dx = \int x^3dx - \int dx$$

$$\int f(x)dx = \frac{1}{4}x^4 - x + C$$

Entonces:

$$A = -\left(\frac{1}{4}x^4 - x\right)\Big|_{-1}^{1} + \left(\frac{1}{4}x^4 - x\right)\Big|_{1}^{2}$$

$$A = -\left(\frac{1}{4}.1^4 - 1 - \left(\frac{1}{4}.(-1)^4 - (-1)\right)\right) + \left(\frac{1}{4}.2^4 - 2 - \left(\frac{1}{4}.1^4 - 1\right)\right)$$

$$A = -\left(-\frac{3}{4} - \frac{5}{4}\right) + \left(2 + \frac{3}{4}\right) \Rightarrow A = 2 + \frac{11}{4} \Rightarrow \boxed{A = \frac{19}{4}}$$

2. Hallar los puntos del plano donde la recta tangente al gráfico de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ es perpendicular a la recta $y = -\frac{1}{4}x$.

Debemos encontrar los puntos, de la forma $(x_0; f(x_0))$, de la curva donde la recta tangente es perpendicular a una recta dada. Sabemos que para que dos rectas sean perpendiculares sus pendientes deben ser opuestas e inversas. Por lo tanto, tenemos que hallar los puntos de la curva que tienen por recta tangente una recta con pendiente igual a 4.

Asimismo, por definición de recta tangente sabemos que:

$$f'(x_0) = 4$$

Hallamos la expresión de la derivada de $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

Para encontrar las abscisas de los puntos pedidos, planteamos:

$$3{x_0}^2 - 4x_0 = 4$$
$$3{x_0}^2 - 4x_0 - 4 = 0$$

Luego, aplicamos la fórmula resolvente para resolver la ecuación cuadrática que quedó planteada anteriormente:

$$x_0 = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.3.(-4)}}{2.3} = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6}$$

$$x_0 = \frac{4+8}{6} = 2 \qquad x_0 = \frac{4-8}{6} = -\frac{2}{3}$$

Como se pide hallar los puntos del plano, debemos hallar las imágenes de los x_0 encontrados, por lo tanto:

Para $x_0 = 2$

$f(2) = 2^3 - 2.2^2 + 1$

$f(2) = 1 \rightarrow (2; 1)$

Para $x_0 = -\frac{2}{3}$

$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 1$

$f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{27} \rightarrow \left(-\frac{2}{3}; -\frac{5}{27}\right)$

Para resolver este ejercicio utilizamos los contenidos de rectas, derivadas y recta tangente.

3. Hallar los intervalos de crecimiento de la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x}$

Para analizar el crecimiento de una función es necesario determinar previamente su dominio. En este caso la función es una función polinómica por lo tanto: $\boldsymbol{Dom(f)} = \mathbb{R}$.

Teniendo en cuenta que en los intervalos de crecimiento de una función, su derivada es positiva, hallamos la derivada de la función $\boldsymbol{f}$ y determinamos el conjunto de positividad de $\boldsymbol{f'}$.

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x \Rightarrow f'(x) = x^2 + 2x - 3}$$

Para determinar los puntos críticos hallamos los ceros de $\boldsymbol{f'}$.

$$\boldsymbol{x^2 + 2x - 3 = 0}$$

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.(-3)}}{2.1} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} \Rightarrow x_1 = 1 \wedge x_2 = -3}$$

Los puntos críticos de la función son: $\boldsymbol{x_1 = 1 \wedge x_2 = -3}$ y $\boldsymbol{f'(x) = (x-1)(x+3)}$

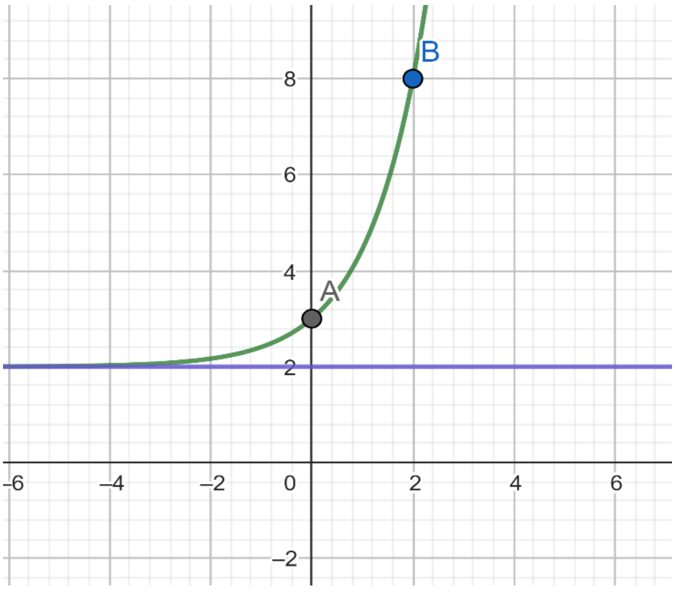
Analizamos los intervalos determinados en su dominio:

$(-\infty; -3)$	$(-3; 1)$	$(1; +\infty)$
$x = -4$ $f'(-4) > 0$ ***La función es creciente***	$x =$ $f'(0) < 0$ ***La función es decreciente***	$x = 2$ $f'(2) > 0$ ***La función es creciente***

Por lo tanto:

La función $\boldsymbol{f}$ es creciente en los intervalos: $(-\infty; -3)$ **y** $(1; +\infty)$

4. La función exponencial de la forma $f(x) = k.a^x + b$, con k, a y b números reales, corta al eje y en el punto $A = (0; 3)$; pasa por el punto B de coordenadas $(2; 8)$ y tiene una asíntota horizontal en $y = 2$. Observar el gráfico y determinar los valores de las constantes k, a y b.



Si observamos el gráfico podemos deducir que:

- En y = 2 existe una asíntota horizontal, por lo tanto b = 2.
- La gráfica de la función corta al eje y en el punto $(0; 3)$. Reemplazando en la ecuación, podemos hallar el valor de k:

$$3 = k.a^0 + 2$$
$$3 - 2 = k.1$$
$$1 = k \rightarrow f(x) = 1.a^x + 2$$

- El punto (2; 8) pertenece a la función. En consecuencia, si se reemplaza las coordenadas en la ecuación, es posible obtener el valor de a.

$$f(x) = 1.a^x + 2$$

$$8 = 1.a^2 + 2$$

$$8 - 2 = a^2$$

$$\sqrt{6} = |a|$$

$$a = \sqrt{6} \;\; descartamos\ la\ solución\ negativa\ puesto\ que\ a > 0\ y\ a \neq 1$$

La ecuación de la función es: $f(x) = (\sqrt{6})^x + 2$

Para resolver este ejercicio resignificamos el concepto de función exponencial. Estos conceptos corresponden a la unidad de “Funciones especiales”