TEMA 2

Ejercicio 1 (2 puntos)

Dada la función

$$f(x) = e^{bx} + t(x+3)$$

encontrar los valores de las constantes $t, b \in R$ para que la ecuación de su recta tangente en $x_0 = 0$ sea $y = 5x + 10$.

Respuesta

La ecuación de una recta tangente en x_0 está dada por la fórmula:

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Como en este caso $x_0 = 0$, se reduce a:

$y = f(0) + f'(0) \cdot x$

Para que se cumpla lo pedido, deben cumplirse entonces que:

$f(0) = 10$ y $f'(0) = 5$

Veamos entonces qué condiciones hay que pedirles a b y t para que esto ocurra:

$f(0) = 1 + 3t = 10 \iff t = 3$

y como

$f'(x) = be^{bx} + t$

entonces

$f'(0) = 5 \iff be^{b\cdot 0} + t = 5 \iff b + t = 5 \iff b = 5 - t$

Como ya vimos que $t = 3$, entonces $b = 2$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Hallar una función $f(x)$ que satisfaga que

$$f'(x) = \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{2\sqrt{x}} \quad \text{y} \quad f(4) = 7$$

Respuesta

Debemos encontrar el conjunto de primitivas de

$$\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{2\sqrt{x}}$$

y luego aquella que satisface la condición pedida.

Hallamos entonces

$$\int \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{2\sqrt{x}}\,dx$$

Si aplicamos la sustitución

$u = \sqrt{x} + 1,$

entonces como

$$du = \left(\sqrt{x}+1\right)' dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx,$$

la integral se reduce a calcular:

$$\int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + a = \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^3}{3} + a, \quad a \in \mathbb{R}$$

Entonces, la función primitiva es

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^3}{3} + a, \quad a \in \mathbb{R}$$

Para que se cumpla la condición, $f(4) = 7$, especializamos en $x = 4$:

$$f(4) = \frac{\left(\sqrt{4}+1\right)^3}{3} + a = 9 + a$$

e igualamos al valor de la condición

$9 + a = 7$

obteniendo así $a = -2$.

La función pedida es

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{3} - 2$$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Encontrar todos los valores $x \in [4\pi; 6\pi]$ de manera que $f(x) = 1$ siendo

$$f(x) = e^{6sen(x+4\pi)}$$

Respuesta

Para que $f(x) = 1$ debe cumplirse que $6 \cdot sen(x + 4\pi) = 0$ (ya que $e^t = 1 \iff t = 0$)

Como las raíces de la función seno son los valores de la forma $k\pi$ (k número entero), quiere decir que para que $f(x)$ se anule debe pedirse que:

$$x + 4\pi = k\pi \iff x = k\pi - 4\pi \iff x = \pi(k - 4).$$

Como se pide que las raíces pertenezcan al intervalo $[4\pi, 6\pi]$, entonces debe ser

$$4\pi \le \pi(k - 4) \le 6\pi$$

de donde se deduce que entonces

$$4 \le k - 4 \le 6 \iff 8 \le k \le 10$$

Por lo tanto las respuestas son: $x = 4\pi; x = 5\pi; x = 6\pi$.

Ejercicio 4 (3 puntos)

Hallar, los valores de las abscisas de los máximos y mínimos, en caso de tenerlos de

$$f(x) = -(x+1)^2 e^{-x}$$

Respuesta

Primero hallamos la derivada de $f(x)$:

$f'^{(x)} = -2(x+1)e^{-x} - (x+1)^2(-e^{-x}) = -2(x+1)e^{-x} + (x+1)^2 e^{-x}$

Sacando e^{-x}de factor común y desarrollando el cuadrado:

$f'(x) = e^{-x}[-2(x+1) + (x+1)^2]$

La función y su derivada está definida en el conjunto de todos los números reales.

Notemos que para que la derivada se anule es suficiente pedir que se anule la expresión polinómica que está entre corchetes, con lo cual

$f'(x) = 0 \iff -2(x+1) + (x+1)^2 = 0$

Desarrollando en el miembro izquierdo el binomio cuadrado y simplificando se llega a la expresión:

$$-2(x+1) + (x+1)^2 = 0$$

$$-2x - 2 + x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$-1 + x^2 = 0$$

Al buscar las raíces del polinomio de grado 2, obtenemos que sus soluciones son:

$x = 1$ ó $x = -1$

Para poder analizar el signo de la derivada podemos analizar solo el signo del polinomio de segundo grado (pues e^{-x} es siempre positivo) ya sea aplicando las propiedades vistas sobre polinomios de ese orden o aplicando Bolzano.

En cualquier caso, se llega a que:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Por lo tanto, para $f'(x)$, es $C^+ = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

Y por lo tanto, en la abscisa $x = -1$ se obtiene un máximo y en $x = 1$ un mínimo local.