Material de repaso para el primer parcial

Selección de ejercicios resueltos

2 Cuatrimestre 2018

1. Hallar analíticamente todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que la distancia entre los puntos $A = (4k;\ -4)$ y $B = (3;\ 3k)$ sea igual a 5.

<u>Respuesta:</u>

La distancia entre dos puntos $A = (a_x; a_y)$ y $B = (b_x; b_y)$ se calcula mediante la fórmula:

$$d(A;B) = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + \left(a_y - y\right)^2}$$

Por lo tanto, para que la distancia entre los puntos A y B sea igual a 5, debe cumplirse que:

$$\sqrt{(4k-3)^2 + \left((-4) - 3k\right)^2} = 5$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad

$$(4k-3)^2 + \left((-4) - 3k\right)^2 = 25$$

Desarrollando los cuadrados y operando algebraicamente

$$(16k^2 - 24k + 9) + (16 + 24k + 9k^2) = 25$$
$$16k^2 - 24k + 9 + 16 + 24k + \ 9k^2 = 25$$
$$25k^2 + 25 = 25$$
$$25(k^2 + 1) = 25$$
$$k^2 + 1 = 1$$
$$k^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 0$$

Existe un único valor de k para el cual la distancia entre los puntos es igual a 5 y es $k = 0$.

2. Hallar analíticamente los puntos del plano donde se cortan las funciones:

$$f(x) = x^2 - 3x - 3 \qquad y \qquad g(x) = -2x - 1$$

<u>Respuesta</u>:

Para hallar los valores de las abscisas de los puntos de intersección se buscan los valores de x que cumplen

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x - 3 = -2x - 1$$
$$x^2 - 3x - 3 + 2x + 1 = 0$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática usando la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

siendo $a = 1; b = -1$ y $c = -2$.

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) =}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

Entonces

$$x_1 = 2 \quad y \quad x_2 = -1$$

Existen dos puntos donde se cruzan las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Uno de ellos tiene por abscisa $x = 2$. El valor de la ordenada lo hallamos reemplazando dicho valor en cualquiera de las dos funciones:

$$g(2) = -2 \cdot 2 - 1 = -5$$

El otro punto tiene por abscisa $x_2 = -1$. El valor de la ordenada es

$$g(-1) = -2 \cdot (-1) - 1 = 1$$

Por lo tanto los puntos donde se cruzan las funciones son:

$$P_1 = (2; -5) \quad y \quad P_2 = (-1; 1)$$

3. Hallar el conjunto de números reales donde se verifica que $f(x) > g(x)$ siendo

$$f(x) = -x^2 + x \qquad y \qquad g(x) = x^2 - x - 2$$

Respuesta:

$$f(x) > g(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad -x^2 + x > x^2 - x - 2$$

Entonces,

$$-x^2 + x > x^2 - x - 2$$

$$-x^2 + x - x^2 + x + 2 > 0$$

$$-2x^2 + 2x + 2 > 0 \text{ (dividimos ambos lados por } (-2))$$

$$x^2 - x - 1 < 0 \text{ (al dividir por un nro negativo cambia el sentido de la desigualdad)}$$

Vamos a encontrar los ceros de la función cuadrática $x^2 - x - 1$ para poder escribirla en forma factorizada.

Para encontrar los ceros usamos la fórmula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

siendo $a = 1; b = -1$ y $c = -1$.

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Entonces

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Por lo tanto podemos escribir

$$x^2 - x - 1 = \left(x - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right) \cdot \left(x - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$$

Volviendo a nuestro problema, debemos buscar los valores de x que cumplen con la desigualdad

$$x^2 - x - 1 < 0$$

Reemplazando la función cuadrática por su forma factorizada

$$\left(x - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right) \cdot \left(x - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) < 0$$

Para que el producto de los monomios sea menor a cero hay dos posibilidades:

- Primer caso:

$$x - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) < 0 \quad y \quad x - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) > 0 \quad (\mathbf{A})$$

$$\Leftrightarrow \quad x < \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \quad y \quad x > \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cap \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$$

Pero

$$\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cap \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right) = \emptyset$$

Es decir, no hay ningún valor de x que cumpla con la condición **(A)**.

- Segundo caso

$$x - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) > 0 \quad y \quad x - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) < 0 \quad (\mathbf{B})$$

$$\Leftrightarrow \quad x > \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \quad y \quad x < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; +\infty\right) \cap \left(-\infty; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Luego, la condición **(B)** se cumple si

$$x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Luego, $f(x) > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Vamos a encontrar otra manera de escribir la función cuadrática $x^2 - x - 1$ utilizando el método para completar cuadrados

$$x^2 - x - 1 = (x^2 - x - 1) = \left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x - 1\right) = \left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right) =$$

$$= \left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right) = \left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

Resumiendo

$$x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

Entonces

$$-x^2 + x + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} < 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{5}{4}$$

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{5}}{2} < x - \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} < x < \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Luego,

$$f(x) > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

4. Hallar analíticamente el conjunto de negatividad de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x-5}{4-x}$$

Respuesta:

La función $f(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 5 > 0 \quad y \quad 4 - x < 0) \ \ o\, si \quad (x - 5 < 0 \quad y \quad 4 - x > 0)$

- $x - 5 > 0 \quad y \quad 4 - x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 5 \ \ y \ \ x > 4 \quad \Leftrightarrow \quad x > 5 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (5; +\infty)$
- $x - 5 < 0 \quad y \quad 4 - x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 5 \ \ y \ \ x < 4 \quad \Leftrightarrow \quad x < 4 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; 4)$

El conjunto de negatividad de la función es el intervalo $(-\infty; 4) \cup (5; +\infty)$

5. Hallar a para que la función definida por $(x) = x^2 - ax + 5$ alcance un mínimo en $(2;\ 1)$.

Respuesta:

Como la función es una parábola con las ramas hacia arriba, sabemos que alcanza el valor míniimo en el vértice. Si la expresión de la parábola es $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, la abscisa del vértice la calculamos como:

$$x_{vértice} = \frac{-\beta}{2\alpha}$$

En nuestra función tenemos que $\alpha = 1\ y\ \ \beta = -a$, entonces

$$x_{vértice} = \frac{-(-a)}{2 \cdot 1} = \frac{a}{2}$$

Por otro lado,

$$x_{vértice} = 2 \quad \text{(la abscisa del vértice es la misma que la del } mínimo\text{)}$$

Entonces

$$\frac{a}{2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = 4$$

6. Encontrar el valor "a" de manera que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tengan exactamente un solo punto de intersección, siendo:

$f(x) = x^2 - x + 4$

$g(x) = x + a$

Respuesta:

Primero debemos plantear la ecuación $f(x) = g(x)$ para hallar el valor de $\boldsymbol{x}$ del punto de intersección .

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 - x + 4 = x + a$$

$$x^2 - x - x + 4 - a = 0$$

$$x^2 - 2x + (4 - a) = 0$$

La ecuación cuadrática la resolvemos usando la fórmula

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (4 - a)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(4 - a)}}{2}$$

Como el enunciado nos pide que se crucen en un solo punto, el término dentro de la raíz cuadrada debe ser nulo. Es decir,

$$4 - 4(4 - a) = 0$$

$$4 - 16 + 4a = 0$$
$$4a - 12 = 0$$
$$a = 3$$

El valor de "a" de manera que las funciones tienen un solo punto de intersección es $\boldsymbol{a = 3}$

7. Dada la función $f(x) = \frac{2x-5}{x+1}$ hallar la función inversa $f^{-1}(x)$ e indicar el dominio de ambas funciones.

Respuesta:

El dominio de la función "f" son todos los valores de x para los cuales no se anula el denominador. Debe ocurrir entonces que $x + 1 \neq 0$, es decir, $x \neq -1$.

Luego,

$$Dom(f) = \{x \in R \; tal \; que \; x \neq -1\} = R - \{-1\}$$

Ahora vamos a calcular la función inversa

$$y = \frac{2x - 5}{x + 1}$$
$$(x + 1)y = 2x - 5$$
$$xy + y = 2x - 5$$
$$xy - 2x = -y - 5$$
$$x(y - 2) = -y - 5$$
$$x = \frac{-y - 5}{y - 2}$$
$$x = \frac{y + 5}{2 - y}$$

La función inversa de "f" es:

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 5}{2 - x}$$

El dominio de la función "f^{-1}" son todos los valores de x para los cuales no se anula el denominador. Debe ocurrir entonces que $2 - x \neq 0$, es decir, $x \neq 2$.

Luego,

$$Dom(f^{-1}) = \{x \in R \; tal \; que \; x \neq 2\} = R - \{2\}$$

8. El consumo de oxígeno (en milímetros por minuto) para una persona que camina a "x" kilómetros por hora está dado por la función $f(x) = 2x^3 + 10x^2 + 5x + 20$, mientras que el consumo de oxígeno para una persona que corre a "x" kilómetros por hora está dado por la función $g(x) = x^3 - 2x + 38$. Se sabe que cuando "$x = 1$" el consumo de oxígeno es idéntico. ¿Existen otros valores de "x" para los cuales el consumo de oxígeno es el mismo?

Respuesta:

Los valores de "x" que hacen que ambas personas tengan el mismo consumo de oxígeno son aquellos valores para los cuales $f(x) = g(x)$. Entonces,

$$f(x) = g(x)$$

$$2x^3 + 10x^2 + 5x + 20 = x^3 - 2x + 38$$

$$2x^3 + 10x^2 + 5x + 20 - x^3 + 2x - 38 = 0$$

$$x^3 + 10x^2 + 7x - 18 = 0 \qquad \textbf{ecuación A}$$

Es decir, todos los valores de "x"que son solución de la ***ecuación A*** serán aquellos donde ambas personas tienen el mismo consumo de oxígeno.

Como se sabe que en "$x = 1$" el consumo de oxígeno es idéntico, tenemos que $x = 1$ satisface la ***ecuación A***. Entonces podemos dividir la ***ecuación A*** por $(x - 1)$

	1	10	7	-18
1		1	11	18
	1	11	18	0

Por lo tanto, podemos escribir la ecuación A como:

$$(x - 1)(x^2 + 11x + 18) = 0 \qquad \textbf{ecuación A}$$

Los otros valores en donde el consumo de oxígeno es el mismo son aquellos en donde se anula $\mathbf{x^2 + 11x + 18}$. Para hallar las raíces de la cuadrática usamos la fórmula

$$x_{1,2} = \frac{-(11) \pm \sqrt{(11)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (18)}}{2 \cdot 1} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 72}}{2} = \frac{-11 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-11 \pm 7}{2}$$

Entonces, $x = -9$ o $x = -2$. Como ambos valores son negativos, y deben representar una distancia en kilómetros, el único valor para el cual el consumo de oxígeno es el mismo es para $x = 1$.

9. Representar en el plano el siguiente conjunto**:**

$$A = \{(x, y) \in R^2 \ tal\ que\!: \ \ y - 1 > 0\,; \ \ 3x - 1 < \ -2x + 4\}$$

Respuesta:

Debemos hallar cuales son los puntos del plano que cumplen ambas desigualdades.

De la primer desigualdad podemos despejar cuales son los posibles valores para la coordenada "y" de los puntos ya que

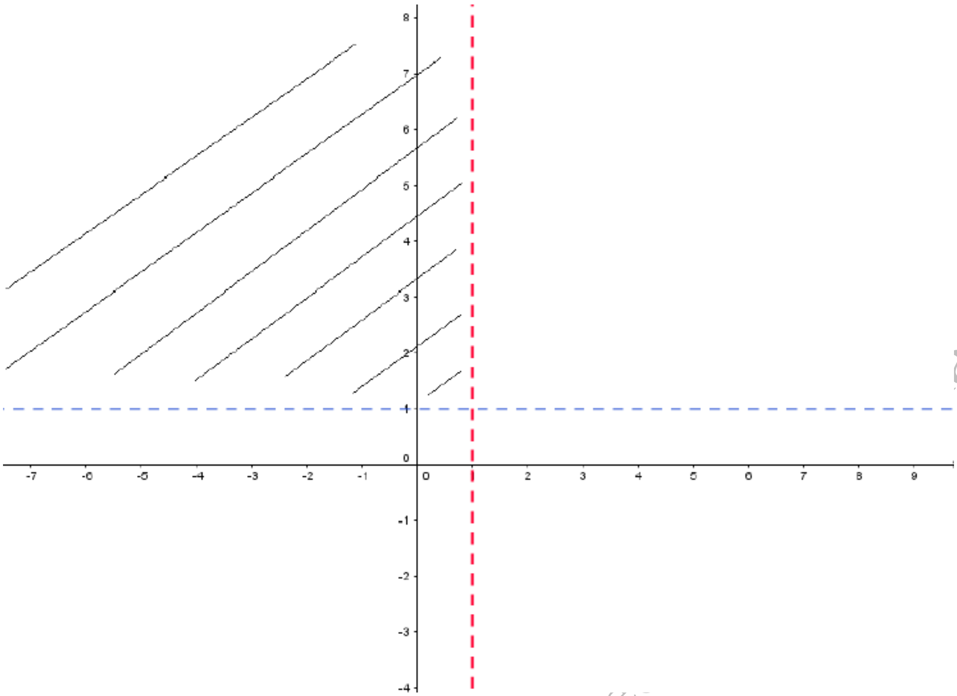
$$y - 1 > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y > 1$$

De la segunda desigualdad podemos despejar cuales son los posibles valores para la coordenada "x" de los puntos ya que

$3x - 1 < -2x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 2x < 4 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 5x < 5 \quad \Leftrightarrow \quad x < 1$

Entonces, el conjunto A lo podemos expresar como

$A = \{(x, y) \in R^2 \; tal \; que: \; y > 1 \; ; \; x < 1\}$



El conjunto A es la zona rayada del gráfico.

19. Se sabe que $x = 1$ es raíz del polinomio $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$.

Hallar los intervalos de positividad y negatividad.

Respuesta:

Para hallar los intervalos de positividad y negatividad del polinomio debemos conocer primero todas las raíces del polinomio.

Como $x = 1$ es raíz, podemos dividir al polinomio $P(x)$ por $(x - 1)$.

	1	4	1	-6
1		1	5	6
	1	5	6	0

$P(x) = (x - 1)(x^2 + 5x + 6)$

Buscamos ahora las raíces de la cuadrática $x^2 + 5x + 6$

$$x_{1,2} = \frac{-(5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

$x_1 = -3$; $x_2 = -2$

El conjunto de ceros del polinomio es:

$C^0 = \{-3; -2; 1\}$

El polinomio se puede expresar como

$P(x) = (x - 1)(x + 3)(x + 2)$

Debemos analizar el signo del polinomio en los intervalos

$$(-\infty; -3)\ (-3; -2)\ (-2; 1)\ (1; +\infty)$$

En el intervalo $(-\infty; -3)$ el signo del polinomio es negativo ya que $P(-4) < 0$

En el intervalo $(-3; -2)$ el signo del polinomio es positivo ya que $P\left(-\frac{5}{2}\right) > 0$

En el intervalo $(-2; 1)$ el signo del polinomio es negativo ya que $P(0) < 0$

En el intervalo $(1; +\infty)$ el signo del polinomio es positivo ya que $P(2) > 0$

Los intervalos de positividad del polinomio son: $(-3; -2)$; $(1; +\infty)$

Los intervalos de negatividad son: $(-\infty; -3)$; $(-2; 1)$

20. Determinar el dominio y el conjunto imagen de la función $f(x) = 1 + 2\sqrt{2x^2 - 2}$

Respuesta:

Primero hallamos el dominio de la función. La función estará bien definida si el argumento de la raíz cuadrada es un número positivo.

Entonces pedimos que

$2x^2 - 2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| \geq 1$

$\Leftrightarrow \quad x \geq 1$ ó $x \leq -1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

El dominio de la función es el conjunto $Dom(f) = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

Para hallar el conjunto imagen debemos tener en cuenta que $\sqrt{t} \geq 0$ (con $t \geq 0$).

Entonces, para todo $x \in Dom(f)$ se verifica que

$$\sqrt{2x^2 - 2} \geq 0$$

$$2\sqrt{2x^2 - 2} \geq 0$$

$$1 + 2\sqrt{2x^2 - 2} \geq 1$$

$$f(x) \geq 1$$

Luego, el conjunto imagen de la función es el intervalo $[1; +\infty)$