SEGUNDO TURNO

TEMA 1

Ejercicio 1 (3 puntos)

Dada la función polinómica $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 3x - 2$, hallar los intervalos de positividad y negatividad de f sabiendo que el gráfico de dicha función corta al eje x en el punto $P = (-1; 0)$.

Respuesta

Si el gráfico de f corta al eje x en el punto $P = (-1\ ;\ 0)$, entonces $x = -1$ es una raíz de la función. Se puede aplicar Ruffini o dividir polinomios para obtener como cociente una función de grado 2.

$$f(x) = (x+1)(3x^2 - x - 2)$$

Si la función f tuviera otros ceros, la única posibilidad es que

$$3x^2 - x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (3) \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{6} = \frac{1 \pm 5}{6}$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -\frac{2}{3}$$

Por último, como la función es continua, podemos considerar el Teorema de Bolzano.

Evaluamos qué sucede con el signo de la función tomando un valor cualquiera que se encuentre den tro del intervalo generado por dos raíces consecutivas. Debemos ver que signo toma en los intervalos

$$(-\infty, -1)\ ;\ \left(-1; -\frac{2}{3}\right)\ ;\ \left(-\frac{2}{3}; 1\right)\ ;\ \ (1; +\infty)$$

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ la función toma valores negativos ya que $f(-2) < 0$
- En el intervalo $\left(-1; -\frac{2}{3}\right)$ la función toma valores positivos ya que $f(-0.8) > 0$
- En el intervalo $\left(-\frac{2}{3}; 1\right)$ la función toma valores negativos ya que $f(0) < 0$
- En el intervalo $(1; +\infty)$ la función toma valores positivos ya que $f(2) > 0$

$C^+ = \left(-1;\ -\frac{2}{3}\right) \cup (1;\ \infty)$

$C^- = (-\infty;\ -1) \cup (-2/3;\ 1)$

Ejercicio 2 (2 puntos)

Hallar los valores $x \in \mathbb{R}$ que son solución de la siguiente inecuación

$$\frac{7x+2}{2x-1} > 3$$

Respuesta

Operamos algebraicamente

$$\frac{7x+2}{2x-1} > 3$$

$$\frac{7x+2}{2x-1} - 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7x+2-3(2x-1)}{2x-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7x+2-6x+3}{2x-1} > 0 \Leftrightarrow \quad \frac{x+5}{2x-1} > 0$$

Para que el cociente sea positivo tenemos dos situaciones posibles:

- Caso I:

  $x+5>0 \quad \wedge \quad 2x-1>0$

  $x+5>0 \quad \Leftrightarrow \quad x>-5 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-5,+\infty)$

  $2x-1>0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x>1 \quad \Leftrightarrow \quad x>\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

  Ambas condiciones se cumplen al mismo tiempo, entonces los valores de x para los cuales se verifica que $x+5>0 \quad \wedge \quad 2x-1>0$ son:

  $x \in (-5,+\infty) \cap \left(\frac{1}{2},+\infty\right) = \left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

- Caso II:

  $x+5<0 \quad \wedge \quad 2x-1<0$

  $x+5<0 \quad \Leftrightarrow \quad x<-5 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty,-5)$

  $2x-1<0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x<1 \quad \Leftrightarrow \quad x<\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$

  Ambas condiciones se cumplen al mismo tiempo, entonces los valores de x para los cuales se verifica que $x+5<0 \quad \wedge \quad 2x-1<0$ son:

  $x \in (-\infty,-5) \cap \left(-\infty,\frac{1}{2}\right) = (-\infty,-5)$

La solución final del problema es la unión de las soluciones de ambos casos:

$$Conjunto\ solución = \ (-\infty,-5) \cup \left(\frac{1}{2},+\infty\right)$$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Dadas las funciones $f(x) = 4x^2 - 16$, $g(x) = \frac{3}{x}$. Hallar la función $(g \circ f)(x)$ y su dominio.

Respuesta

Primero hallamos la expresión de la función $g \circ f$

$$g(f(x)) = g(4x^2 - 16) = \frac{3}{4x^2 - 16}$$

Aquellos valores en donde se anula el denominador la función no está definida. Buscamos quienes son estos valores:

$4x^2 - 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$ ó $x = -2$

Luego $Dom(g \circ f) = \mathbb{R} - \{-2,2\}$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Dada la función $f(x) = -2x + 3$ y el punto $P = (a; 5)$, determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que P sea un punto del gráfico de f.

Para el valor hallado, calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y $Q = (2; 11)$

Respuesta

Si P pertenece al gráfico de f, entonces se verifica $5 = -2.a + 3$, despejando se obtiene $a = -1$.

La recta que pasa por P y por Q tiene pendiente igual a

$$\frac{11 - 5}{2 - (-1)} = \frac{6}{3} = 2$$

Se deduce entonces que la ecuación es $y = 2x + b$.

Reemplazamos P o Q en la ecuación para obtener el valor de la ordenada al origen.

Por ejemplo, reemplazando P, obtenemos:

$$5 = 2(-1) + b$$
$$7 = b$$

La ecuación de la recta es $y = 2x + 7$.

TEMA 2

Ejercicio 1 (3 puntos)

Dadas las funciones

$f(x) = \sqrt[3]{x-5}$, $g(x) = ax + 1$ Hallar, si existe, el valor de $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ de manera tal que el conjunto de negatividad C^- de la función $(f \circ g)(x)$ sea el intervalo $(-\infty; 2)$.

Respuesta

Primero debemos hallar la expresión de $(f \circ g)(x)$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(ax+1) = \sqrt[3]{(ax+1)-5} = \sqrt[3]{ax-4}$

$(f \circ g)(x) = \sqrt[3]{ax-4}$

Para hallar el conjunto de negatividad debemos plantear que

$\sqrt[3]{ax-4} \leq 0$

Como la función es una raíz cúbica, tomará valores negativos si y sólo si su argumento es negativo

$ax - 4 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{4}{a} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty, \frac{4}{a}\right)$

Debemos dividir por a por lo tanto debemos tener en cuenta su signo:

Si $a < 0$ entonces $x \geq \frac{4}{a} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(\frac{4}{a}, +\infty\right)$

$Si\ a > 0 \quad x \leq \frac{4}{a} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty, \frac{4}{a}\right)$

El enunciado nos dice que el intervalo de negatividad debe ser igual a $(-\infty; 2)$, entonces debemos descartar la posibilidad de que $a < 0$.

La posibilidad que nos queda es la que se deduce al suponer $a > 0$

$$\left(-\infty, \frac{4}{a}\right) = (-\infty; 2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{a} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2$$

Ejercicio 2 (2 puntos)

Hallar analíticamente los puntos del plano donde se cortan las funciones:

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 - x - 1 \quad , \quad g(x) = -x^3 + x + 11$$

Respuesta

Para hallar las abscisas de los puntos donde se cortan las gráficas de las funciones debemos plantear

$$f(x) = g(x)$$
$$-x^3 + 2x^2 - x - 1 = -x^3 + x + 11$$
$$2x^2 - x - 1 = x + 11$$
$$2x^2 - x - 1 - x - 11 = 0$$
$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$

Ahora hallamos las raíces de la última ecuación cuadrática

$$x_{12} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{4} = \frac{2 \pm 10}{4}$$

$x_1 = 3 \quad x_2 = -2$

Debemos hallar las ordenadas de los puntos.

Si $x_1 = 3$, evaluando por ejemplo en la función $f(x)$, la ordenada es

$$f(3) = -(3)^3 + 2(3)^2 - 3 - 1 = -27 + 18 - 4 = -13$$

Si $x_2 = -2$ la ordenada es

$$f(-2) = -(-2)^3 + 2(-2)^2 - (-2) - 1 = 8 + 8 + 2 - 1 = 17$$

Los puntos donde se cortan las gráficas de las funcione son:

$$P_1 = (3; -13) \qquad P_2 = (-2; 17)$$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Hallar los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ sabiendo que los polinomios

$P(x) = (a + 2b)\, x^2 + 6x + 4$

$Q(x) = -x^2 + (5a - b)x + \dfrac{8}{3}$

cumplen la siguiente relación $2P(x) - 3Q(x) = 0$

Respuesta

Debemos encontrar prime quien es el polinomio $2P(x) - 3Q(x)$

$$\begin{aligned}2P(x)-3Q(x) &= 2[(a+2b)\,x^2+6x+4\,]-3\left[-x^2+(5a-b)x+\frac{8}{3}\right]\\ &= 2(a+2b)\,x^2+12x+8+3x^2-3(5a-b)x-8\\ &= [2(a+2b)+3]x^2+[12-3(5a-b)]x\\ &= [2a+4b+3]x^2+[12-15a+3b]x\end{aligned}$$

Entonces,

$2P(x)-3Q(x)=[2a+4b+3]x^2+[12-15a+3b]x$

Por otro lado

$2P(x)-3Q(x)=0$

Entonces

$[2a+4b+3]x^2+[12-15a+3b]x=0=0x^2+0x$

$$2a+4b+3=0$$

$$12-15a+3b=0$$

De la primera ecuación podemos despejar a

$a=-2b-\dfrac{3}{2}$

Reemplazando en la segunda ecuación

$$12-15\left(-2b-\frac{3}{2}\right)+3b=0 \;\Leftrightarrow\; 12+30b+\frac{45}{2}+3b=0 \;\Leftrightarrow\; 33b=-\frac{69}{2} \quad\Leftrightarrow\; b=-\frac{23}{22}$$

$$\Rightarrow\quad a=-2\cdot\left(-\frac{23}{22}\right)-\frac{3}{2}=\frac{23}{11}-\frac{3}{2}=\frac{13}{22}$$

Entonces, los valores pedidos son:

$a=\dfrac{13}{22} \qquad b=-\dfrac{23}{22}$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Hallar los valores de $a,c\in\mathbb{R}$ para que la función $f(x)=\frac{ax-5}{cx+12}$ tenga asíntotas en $y=2$, $x=3$

Respuesta

Si la función tiene una asíntota (vertical) en $x=3$

$c\cdot 3+12=0 \quad\Leftrightarrow\quad c=-4$

Por otro lado,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{ax-5}{-4x+12} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(a-\frac{5}{x}\right)}{x\left(-4+\frac{12}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(a-\frac{5}{x}\right)}{\left(-4+\frac{12}{x}\right)} = -\frac{a}{4}$$

Como tiene en $y = 2$ una asíntota horizontal

$$-\frac{a}{4} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = -8$$

Los valores pedidos son: $a = -8, c = -4$

TEMA 3

Ejercicio 1 (3 puntos)

Dada la función

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x}{-2x^2 - 2x + 12}$$

Hallar el dominio de la función.

Hallar, si existen, las ecuaciones de las asíntotas horizontales y/o verticales.

Respuesta

En principio, analicemos que para hallar el dominio de $f(x) = \frac{2x^2-4x}{-2x^2-2x+12}$ alcanza con excluir del conjunto de números reales a aquellos valores que anulan su denominador.

Igualamos a cero el denominador y utilizando la fórmula resolvente hallamos los posibles valores de x:

$$-2x^2 - 2x + 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 12}}{2 \cdot (-2)} = \frac{2 \pm \sqrt{4+96}}{-4} = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{-4} = \frac{2 \pm 10}{-4}$$

$$x_1 = -3 \quad x_2 = 2$$

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$

A continuación evaluamos si en dichos valores existe asíntota vertical.

Analizamos los siguientes límites:

$$\lim_{x \to -3} \frac{2x^2 - 4x}{-2x^2 - 2x + 12}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 4x}{-2x^2 - 2x + 12}$$

Analicemos el primer caso:

$$\lim_{x \to -3} \frac{2x^2 - 4x}{-2x^2 - 2x + 12} = \infty$$

ya que el denominador tiende a cero y el numerador tiende a 30. Entonces, en $x = -3$ hay una asíntota vertical.

Efectuando un análisis similar para el segundo límite, podemos observar que cuando x tiende a 2, tanto el numerador como el denominador de f(x) tienden a cero. Factorizando el numerador y denominador podemos simplificar y salvar la indeterminación, se obtiene:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-4x}{-2x^2-2x+12} = \lim_{x\to 2} \frac{2x(x-2)}{-2(x+3)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{2x}{-2(x+3)} = -\frac{2}{5}$$

De aquí concluimos que f no presenta una AV en x=2

Finalmente, para determinar si f presenta AH, debemos evaluar el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-4x}{-2x^2-2x+12} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(2-\frac{4}{x}\right)}{x^2\left(-2-\frac{2}{x}+\frac{12}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(2-\frac{4}{x}\right)}{\left(-2-\frac{2}{x}+\frac{12}{x^2}\right)} = -1$$

La función tiene una asíntota horizontal en $y=-1$

Ejercicio 2 (2 puntos)

Expresar el conjunto

$S = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |2x-1| \leq 5 \quad y \ \ 3x+5 > 8\}$

como intervalo o unión de intervalos.

Respuesta

En principio, observemos que para que un cierto "x" pertenezca al conjunto S, debe verificar simultáneamente las desigualdades $|2x-1| \leq 5$ y $3x+5 > 8$

$|2x-1| \leq 5 \iff -5 \leq 2x-1 \leq 5 \iff -4 \leq 2x \leq 6 \iff -2 \leq x \leq 3 \iff x \in [-2,3]$

$3x+5 > 8 \iff 3x > 3 \iff x > 1 \iff x \in (1,+\infty)$

Como ambas condiciones se deben cumplir al mismo tiempo

$S = [-2,3] \cap (1,+\infty) = (1,3]$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Hallar la función $f^{-1}(x)$ si

$g(x) = 1-2x \qquad f(x) = 3 - \dfrac{2x}{g(x)}$

Respuesta

Primero debemos hallar la expresión de f:

$$f(x) = 3 - \frac{2x}{g(x)} = 3 - \frac{2x}{1-2x} = \frac{3(1-2x)-2x}{1-2x} = \frac{3-6x-2x}{1-2x} = \frac{3-8x}{1-2x}$$

Ahora hallamos la función inversa

$$\frac{3-8x}{1-2x} = y$$

$$3-8x = y(1-2x)$$

$$3-8x = y-2xy$$

$$3-y = 8x-2xy$$

$$3-y = (8-2y)x$$

$$\frac{3-y}{8-2y} = x$$

Entonces

$$f^{-1}(x) = \frac{3-x}{8-2x}$$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Sea $\boldsymbol{V}$ es el vértice de la parábola $y = 2x^2 + 4x + 6$

Sea $\boldsymbol{P}$ el punto donde se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = 3x + 2$ $g(x) = -5x + 18$

Hallar la distancia entre los puntos $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{V}$.

Respuesta

La abscisa del vértice de la parábola es:

$$x_v = -\frac{4}{2 \cdot 2} = -1$$

La ordenada del vértice es

$$y_v = 2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 6 = 4$$

El vértice de la parábola es el punto $V = (-1; 4)$

Ahora vamos a hallar el punto donde se cortan las gráficas de las funciones $f(x), g(x)$.

$$f(x) = g(x)$$

$$3x + 2 = -5x + 18 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 5x = 18 - 2 \quad \Leftrightarrow \quad 8x = 16 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

$$f(2) = 3 \cdot 2 + 2 = 8$$

El punto donde se cruzan las funciones es

$$P = (2; 8)$$

$$d(V; P) = \sqrt{(-1-2)^2 + (4-8)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

TEMA 4

Ejercicio 1 (3 puntos)

Dada la función $f(x) = -2x + 3$ y el punto $P = (a; 5)$, determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que P sea un punto del gráfico de f.

Para el valor hallado, calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y $Q = (2; 11)$

Respuesta

Si P pertenece al gráfico de f, entonces se verifica $5 = -2.a + 3$, despejando se obtiene $a = -1$.

La recta que pasa por P y por Q tiene pendiente igual a

$$\frac{11-5}{2-(-1)} = \frac{6}{3} = 2$$

Se deduce entonces que la ecuación es $y = 2x + b$.

Reemplazamos P o Q en la ecuación para obtener el valor de la ordenada al origen.

Por ejemplo, reemplazando P, obtenemos:

$$5 = 2(-1) + b$$
$$7 = b$$

La ecuación de la recta es $y = 2x + 7$.

Ejercicio 2 (2 puntos)

Dadas las funciones $f(x) = 4x^2 - 16$, $g(x) = \frac{3}{x}$. Hallar la función $(g \circ f)(x)$ y su dominio.

Respuesta

Primero hallamos la expresión de la función $g \circ f$

$g(f(x)) = g(4x^2 - 16) = \dfrac{3}{4x^2 - 16}$

Aquellos valores en donde se anula el denominador la función no está definida. Buscamos quienes son estos valores:

$4x^2 - 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$ ó $x = -2$

Luego $Dom(g \circ f) = \mathbb{R} - \{-2,2\}$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Hallar los valores $x \in \mathbb{R}$ que son solución de la siguiente inecuación

$$\frac{7x+2}{2x-1} > 3$$

Respuesta

Operamos algebraicamente

$$\frac{7x+2}{2x-1} > 3$$

$$\frac{7x+2}{2x-1} - 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7x+2-3(2x-1)}{2x-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7x+2-6x+3}{2x-1} > 0 \Leftrightarrow \quad \frac{x+5}{2x-1} > 0$$

Para que el cociente sea positivo tenemos dos situaciones posibles:

- Caso I:

  $x+5>0 \quad \wedge \quad 2x-1>0$

  $x+5>0 \quad \Leftrightarrow \quad x>-5 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-5,+\infty)$

  $2x-1>0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x>1 \quad \Leftrightarrow \quad x>\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

  Ambas condiciones se cumplen al mismo tiempo, entonces los valores de x para los cuales se verifica que $x+5>0 \quad \wedge \quad 2x-1>0$ son:

  $x \in (-5,+\infty) \cap \left(\frac{1}{2},+\infty\right) = \left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

- Caso II:

  $x+5<0 \quad \wedge \quad 2x-1<0$

  $x+5<0 \quad \Leftrightarrow \quad x<-5 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty,-5)$

  $2x-1<0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x<1 \quad \Leftrightarrow \quad x<\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$

  Ambas condiciones se cumplen al mismo tiempo, entonces los valores de x para los cuales se verifica que $x+5<0 \quad \wedge \quad 2x-1<0$ son:

  $x \in (-\infty,-5) \cap \left(-\infty,\frac{1}{2}\right) = (-\infty,-5)$

La solución final del problema es la unión de las soluciones de ambos casos:

$$Conjunto\ solución = (-\infty, -5) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Dada la función polinómica $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 3x - 2$, hallar los intervalos de positividad y negatividad de f sabiendo que el gráfico de dicha función corta al eje x en el punto $P = (-1; 0)$.

Respuesta

Si el gráfico de f corta al eje x en el punto $P = (-1\ ;\ 0)$, entonces $x = -1$ es una raíz de la función.

Se puede aplicar Ruffini o dividir polinomios para obtener como cociente una función de grado 2.

$$f(x) = (x + 1)(3x^2 - x - 2)$$

Si la función f tuviera otros ceros, la única posibilidad es que

$$3x^2 - x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (3) \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{6} = \frac{1 \pm 5}{6}$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -\frac{2}{3}$$

Por último, como la función es continua, podemos considerar el Teorema de Bolzano.

Evaluamos qué sucede con el signo de la función tomando un valor cualquiera que se encuentre den tro del intervalo generado por dos raíces consecutivas. Debemos ver que signo toma en los intervalos

$$(-\infty, -1)\ ;\ \left(-1; -\frac{2}{3}\right)\ ;\ \left(-\frac{2}{3}; 1\right)\ ;\ \ (1; +\infty)$$

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ la función toma valores negativos ya que $f(-2) < 0$
- En el intervalo $\left(-1; -\frac{2}{3}\right)$ la función toma valores positivos ya que $f(-0.8) > 0$
- En el intervalo $\left(-\frac{2}{3}; 1\right)$ la función toma valores negativos ya que $f(0) < 0$
- En el intervalo $(1; +\infty)$ la función toma valores positivos ya que $f(2) > 0$

$C^+ = \left(-1;\ -\frac{2}{3}\right) \cup (1;\ \infty)$

$C^- = (-\infty;\ -1) \cup (-2/3;\ 1)$

TEMA 5

Ejercicio 1 (3 puntos)

Hallar los valores de $a, c \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = \frac{ax-5}{cx+12}$ tenga asíntotas en $y = 2$, $x = 3$

Respuesta

Si la función tiene una asíntota (vertical) en $x = 3$

$c \cdot 3 + 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = -4$

Por otro lado,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{ax-5}{-4x+12} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(a-\frac{5}{x}\right)}{x\left(-4+\frac{12}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(a-\frac{5}{x}\right)}{\left(-4+\frac{12}{x}\right)} = -\frac{a}{4}$$

Como tiene en $y = 2$ una asíntota horizontal

$$-\frac{a}{4} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = -8$$

Los valores pedidos son: $a = -8, c = -4$

Ejercicio 2 (2 puntos)

Hallar los valores de $a, b \ \in \mathbb{R}$ sabiendo que los polinomios

$P(x) = (a+2b)\,x^2 + 6x + 4$

$Q(x) = -x^2 + (5a-b)x + \frac{8}{3}$

cumplen la siguiente relación $\ 2P(x) - 3Q(x) = 0$

Respuesta

Debemos encontrar prime quien es el polinomio $2P(x) - 3Q(x)$

$$\begin{aligned} 2P(x) - 3Q(x) &= 2[(a+2b)\,x^2 + 6x + 4\,] - 3\left[-x^2 + (5a-b)x + \frac{8}{3}\right] \\ &= 2(a+2b)\,x^2 + 12x + 8 + 3x^2 - 3(5a-b)x - 8 \end{aligned}$$

$$= [2(a + 2b) + 3]x^2 + [12 - 3(5a - b)]x$$
$$= [2a + 4b + 3]x^2 + [12 - 15a + 3b]x$$

Entonces,

$2P(x) - 3Q(x) = [2a + 4b + 3]x^2 + [12 - 15a + 3b]x$

Por otro lado

$2P(x) - 3Q(x) = 0$

Entonces

$[2a + 4b + 3]x^2 + [12 - 15a + 3b]x = 0 = 0x^2 + 0x$

$$2a + 4b + 3 = 0$$
$$12 - 15a + 3b = 0$$

De la primera ecuación podemos despejar a

$a = -2b - \frac{3}{2}$

Reemplazando en la segunda ecuación

$12 - 15\left(-2b - \frac{3}{2}\right) + 3b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12 + 30b + \frac{45}{2} + 3b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 33b = -\frac{69}{2} \quad \Leftrightarrow \quad b = -\frac{23}{22}$

$\Rightarrow \quad a = -2 \cdot \left(-\frac{23}{22}\right) - \frac{3}{2} = \frac{23}{11} - \frac{3}{2} = \frac{13}{22}$

Entonces, los valores pedidos son:

$a = \frac{13}{22} \qquad b = -\frac{23}{22}$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Hallar analíticamente los puntos del plano donde se cortan las funciones:

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 - x - 1 \quad , \quad g(x) = -x^3 + x + 11$$

Respuesta

Para hallar las abscisas de los puntos donde se cortan las gráficas de las funciones debemos plantear

$$f(x) = g(x)$$
$$-x^3 + 2x^2 - x - 1 = -x^3 + x + 11$$

$$2x^2 - x - 1 = x + 11$$
$$2x^2 - x - 1 - x - 11 = 0$$
$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$

Ahora hallamos las raíces de la última ecuación cuadrática

$$x_{12} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+96}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{4} = \frac{2 \pm 10}{4}$$

$x_1 = 3 \quad x_2 = -2$

Debemos hallar las ordenadas de los puntos.

Si $x_1 = 3$, evaluando por ejemplo en la función $f(x)$, la ordenada es

$$f(3) = -(3)^3 + 2(3)^2 - 3 - 1 = -27 + 18 - 4 = -13$$

Si $x_2 = -2$ la ordenada es

$$f(-2) = -(-2)^3 + 2(-2)^2 - (-2) - 1 = 8 + 8 + 2 - 1 = 17$$

Los puntos donde se cortan las gráficas de las funcione son:

$$P_1 = (3; -13) \qquad P_2 = (-2; 17)$$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Dadas las funciones

$f(x) = \sqrt[3]{x-5}$, $g(x) = ax + 1$ Hallar, si existe, el valor de $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ de manera tal que el conjunto de negatividad C^- de la función $(f \circ g)(x)$ sea el intervalo $(-\infty; 2)$.

Respuesta

Primero debemos hallar la expresión de $(f \circ g)(x)$.

$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(ax+1) = \sqrt[3]{(ax+1) - 5} = \sqrt[3]{ax-4}$

$(f \circ g)(x) = \sqrt[3]{ax-4}$

Para hallar el conjunto de negatividad debemos plantear que

$\sqrt[3]{ax-4} \leq 0$

Como la función es una raíz cúbica, tomará valores negativos si y sólo si su argumento es negativo

$$ax-4\leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax\leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad x\leq \frac{4}{a} \quad \Leftrightarrow \quad x\in\left(-\infty,\frac{4}{a}\right)$$

Debemos dividir por a por lo tanto debemos tener en cuenta su signo:

Si $a<0$ entonces $x\geq \frac{4}{a} \;\Leftrightarrow\; x\in\left(\frac{4}{a},+\infty\right)$

$Si\ a>0 \quad x\leq \frac{4}{a} \;\Leftrightarrow\; x\in\left(-\infty,\frac{4}{a}\right)$

El enunciado nos dice que el intervalo de negatividad debe ser igual a $(-\infty;2)$, entonces debemos descartar la posibilidad de que $a<0$.

La posibilidad que nos queda es la que se deduce al suponer $a>0$

$$\left(-\infty,\frac{4}{a}\right)=(-\infty;2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{a}=2 \quad \Leftrightarrow \quad a=2$$

TEMA 6

Ejercicio 1 (3 puntos)

Sea ***V*** es el vértice de la parábola $y = 2x^2 + 4x + 6$

Sea ***P*** el punto donde se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = 3x + 2 \quad g(x) = -5x + 18$

Hallar la distancia entre los puntos ***P*** y ***V***.

Respuesta

La abscisa del vértice de la parábola es:

$$x_v = -\frac{4}{2 \cdot 2} = -1$$

La ordenada del vértice es

$$y_v = 2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 6 = 4$$

El vértice de la parábola es el punto $V = (-1; 4)$

Ahora vamos a hallar el punto donde se cortan las gráficas de las funciones $f(x), g(x)$.

$$f(x) = g(x)$$

$$3x + 2 = -5x + 18 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 5x = 18 - 2 \quad \Leftrightarrow \quad 8x = 16 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

$$f(2) = 3 \cdot 2 + 2 = 8$$

El punto donde se cruzan las funciones es

$P = (2; 8)$

$$d(V; P) = \sqrt{(-1-2)^2 + (4-8)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Ejercicio 2 (2 puntos)

Hallar la función $f^{-1}(x)$ si

$g(x) = 1 - 2x \qquad f(x) = 3 - \dfrac{2x}{g(x)}$

Respuesta

Primero debemos hallar la expresión de f:

$$f(x) = 3 - \frac{2x}{g(x)} = 3 - \frac{2x}{1-2x} = \frac{3(1-2x)-2x}{1-2x} = \frac{3-6x-2x}{1-2x} = \frac{3-8x}{1-2x}$$

Ahora hallamos la función inversa

$$\frac{3-8x}{1-2x} = y$$
$$3 - 8x = y(1-2x)$$
$$3 - 8x = y - 2xy$$
$$3 - y = 8x - 2xy$$
$$3 - y = (8-2y)x$$
$$\frac{3-y}{8-2y} = x$$

Entonces

$$f^{-1}(x) = \frac{3-x}{8-2x}$$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Expresar el conjunto

$S = \{x \in \mathbb{R} : \ |2x - 1| \leq 5 \quad y \ \ 3x + 5 > 8\}$

como intervalo o unión de intervalos.

Respuesta

En principio, observemos que para que un cierto “x” pertenezca al conjunto S, debe verificar simultáneamente las desigualdades $|2x-1| \leq 5$ y $3x+5>8$

$|2x-1| \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad -5 \leq 2x-1 \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad -4 \leq 2x \leq 6 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq x \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-2,3]$

$3x+5>8 \quad \Leftrightarrow \quad 3x>3 \quad \Leftrightarrow \quad x>1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (1,+\infty)$

Como ambas condiciones se deben cumplir al mismo tiempo

$S=[-2,3] \cap (1,+\infty) = (1,3]$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Dada la función

$$f(x)=\frac{2x^2-4x}{-2x^2-2x+12}$$

Hallar el dominio de la función.

Hallar, si existen, las ecuaciones de las asíntotas horizontales y/o verticales.

Respuesta

En principio, analicemos que para hallar el dominio de $f(x)=\frac{2x^2-4x}{-2x^2-2x+12}$ alcanza con excluir del conjunto de números reales a aquellos valores que anulan su denominador.

Igualamos a cero el denominador y utilizando la fórmula resolvente hallamos los posibles valores de x:

$$-2x^2-2x+12=0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-2)\cdot 12}}{2\cdot(-2)}=\frac{2\pm\sqrt{4+96}}{-4}=\frac{2\pm\sqrt{100}}{-4}=\frac{2\pm 10}{-4}$$

$$x_1=-3 \quad x_2=2$$

$Dom(f)=\mathbb{R}-\{-3,2\}$

A continuación evaluamos si en dichos valores existe asíntota vertical.

Analizamos los siguientes límites:

$$\lim_{x\to -3}\frac{2x^2-4x}{-2x^2-2x+12}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-4x}{-2x^2-2x+12}$$

Analicemos el primer caso:

$$\lim_{x \to -3} \frac{2x^2 - 4x}{-2x^2 - 2x + 12} = \infty$$

ya que el denominador tiende a cero y el numerador tiende a 30. Entonces, en $x = -3$ hay una asíntota vertical.

Efectuando un análisis similar para el segundo límite, podemos observar que cuando x tiende a 2, tanto el numerador como el denominador de f(x) tienden a cero. Factorizando el numerador y denominador podemos simplificar y salvar la indeterminación, se obtiene:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 4x}{-2x^2 - 2x + 12} = \lim_{x \to 2} \frac{2x(x-2)}{-2(x+3)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{2x}{-2(x+3)} = -\frac{2}{5}$$

De aquí concluimos que f no presenta una AV en x=2

Finalmente, para determinar si f presenta AH, debemos evaluar el siguiente límite:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 4x}{-2x^2 - 2x + 12} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2\left(2 - \frac{4}{x}\right)}{x^2\left(-2 - \frac{2}{x} + \frac{12}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(2 - \frac{4}{x}\right)}{\left(-2 - \frac{2}{x} + \frac{12}{x^2}\right)} = -1$$

La función tiene una asíntota horizontal en $y = -1$