RESPUESTAS EXAMEN FINAL

15/12/15 - TEMA 1

Ejercicio 1

Hallar intervalos de crecimiento y decrecimiento y las abscisas de los máximos y mínimos locales (si existen) de la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

Solución y comentarios

Primero vamos a calcular el dominio de la función. En este caso la función es un cociente de polinomios, y estará definida sí y solo sí el polinomio del denominador no se anula. Vamos a buscar los puntos donde el denominador se anula para excluirlos del dominio.

Entonces,

$$x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad |x| = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \vee x = -2$$

Finalmente

$$Dom(f) = R - \{-2, 2\}.$$

Ahora vamos a calcular la derivada primera y su dominio.

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - x^2(2x)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2}$$

El dominio de la derivada primera, al igual que la función, es:

$$Dom(f) = R - \{-2, 2\}.$$

Igualamos a cero la derivada primera para hallar los puntos críticos (candidatos a máximos y/o mínimos de la función):

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

Teniendo en cuenta los valores donde la derivada primera no está definida, y el valor donde se anula, los intervalos que debemos analizar son: $(-\infty; -2)$, $(-2; 0)$, $(0; 2)$ y $(2; +\infty)$.

- en el intervalo $(-\infty; -2)$ la función es creciente ya que si evaluamos la derivada primera en $x = -3$ resulta

$$f'(-3) = \frac{-8 \cdot (-3)}{((-3)^2 - 4)^2} = \frac{24}{25} > 0.$$

- en el intervalo $(-2;0)$ la función es creciente ya que si evaluamos la derivada primera en $x=-1$ resulta
$$f'(-1)=\frac{-8\cdot(-1)}{((-1)^2-4)^2}=\frac{8}{25}>0.$$
- en el intervalo $(0;2)$ la función es decreciente ya que si evaluamos la derivada primera en $x=1$ resulta
$$f'(1)=\frac{-8\cdot 1}{((1)^2-4)^2}=-\frac{8}{9}<0.$$
- en el intervalo $(2;+\infty)$ la función es decreciente ya que si evaluamos la derivada primera en $x=3$ resulta
$$f'(3)=\frac{-8\cdot 3}{((3)^2-4)^2}=-\frac{24}{25}<0.$$

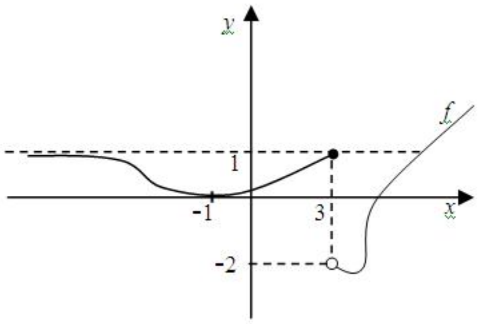
Como la función es creciente en el intervalo $(-2;0)$ y decreciente en el intervalo $(0;2)$, la función tiene un máximo relativo en el punto
$$P_{\text{máx}}=(0;f(0))=(0;0).$$

La función no tiene mínimo relativo.

Ejercicio 2

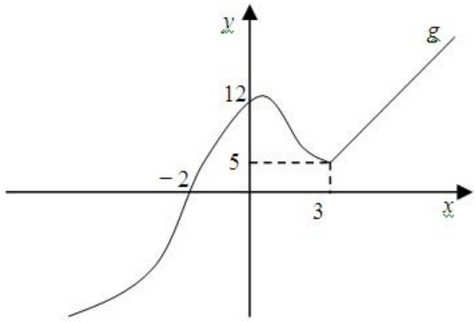
A partir de las funciones f y g definidas en los siguientes gráficos, dar su dominio, determinar (si existen) los límites indicados.

Solución y comentarios



$\lim_{x \to -1} f(x) =$

$\lim_{x \to 3} f(x) =$



$\lim_{x \to 0} (1 + g(x)) =$

$\lim_{x \to -2} g(x) =$

- Como puede observarse en el gráfico:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = 0$$

- Para calcular el límite de $f(x)$ cuando $x \to 3$ debemos calcular los límites laterales:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = -2$$

  Como los límites laterales son distintos, no existe el límite pedido.

- Para calcular el límite de $(1 + g(x))$ cuando $x \to 0$ debemos aplicar la propiedad que dice *"el límite de una suma de funciones es igual a la suma de los límites"*:

$$\lim_{x \to 0} (1 + g(x)) = \lim_{x \to 0} 1 + \lim_{x \to 0} g(x) = 1 + 12 = 13$$

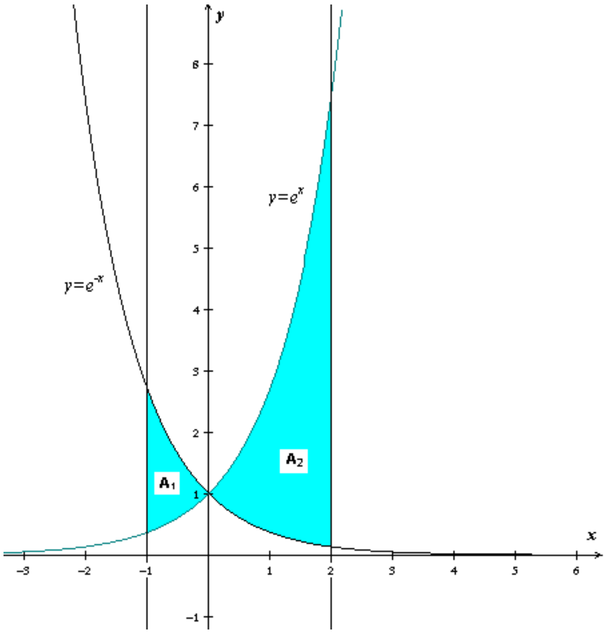
- Como puede observarse en el gráfico:

$$\lim_{x \to -2} g(x) = 0$$

Ejercicio 3

Calcular el área de la región encerrada por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

Solución y comentarios



Se puede ver en el gráfico que el área pedida es igual a:

$$\text{Área} = \text{área de } A_1 + \text{área de } A_2.$$

- Cálculo del área A_1:

$$\begin{aligned}
\text{área de } A_1 &= \int_{-1}^{0} \left(e^{-x} - e^x\right)\, dx = \left(-e^{-x} - e^x\right)\Big|_{-1}^{0} = \\
&= \left(-e^{-0} - e^0\right) - \left(-e^{-(-1)} - e^{-1}\right) = (-1-1) - \left(-e^1 - e^{-1}\right) \\
&= -2 + e + e^{-1}.
\end{aligned}$$

- Cálculo del área A_2:

$$\begin{aligned}
\text{área de } A_2 &= \int_{0}^{2} \left(e^{x} - e^{-x}\right)\, dx = \left(e^{x} - (-e^{-x})\right)\Big|_{0}^{2} = \left(e^x + e^{-x}\right)\Big|_{0}^{2} = \\
&= \left(e^2 + e^{-2}\right) - \left(e^0 + e^{-0}\right) = \left(e^2 + e^{-2}\right) - (1+1)) \\
&= e^2 + e^{-2} - 2
\end{aligned}$$

- Finalmente el área pedida es:

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \left(-2 + e + e^{-1}\right) + \left(e^2 + e^{-2} - 2\right)) = \\
&= -4 + e + e^{-1} + e^2 + e^{-2}
\end{aligned}$$

Ejercicio 4

Hallar todos los valores de $x \in R$ que satisfacen las siguientes desigualdades:

$$\frac{x-2}{3} - \frac{3x-1}{5} \leq \frac{17}{15} \quad , \quad 8-3x \geq 2-x$$

Solución y comentarios

- Primero vamos a buscar los valores de x que cumplen la primer desigualdad:

$$\begin{aligned}
\frac{x-2}{3} - \frac{3x-1}{5} &\leq \frac{17}{15} \\
\frac{5(x-2)-3(3x-1)}{15} &\leq \frac{17}{15} \\
\frac{5x-10-9x+3}{15} &\leq \frac{17}{15} \\
\frac{-4x-7}{15} &\leq \frac{17}{15} \\
-4x-7 &\leq 17 \\
-4x &\leq 24 \\
x &\geq -\frac{24}{4} \\
x &\geq -6
\end{aligned}$$

Los valores de $x \in [-6; +\infty)$ cumplen la desigualdad.

- Vamos a buscar los valores de x que cumplen la segunda desigualdad:

$$\begin{aligned}
8-3x &\geq 2-x \\
-3x+x &\geq 2-8 \\
-2x &\geq -6 \\
2x &\leq 6 \\
x &\leq 3
\end{aligned}$$

Los valores de $x \in (-\infty; 3]$ cumplen la desigualdad.

- Los valores de x que cumplen ambas desigualdades son:

$$x \in [-6; +\infty) \cap (-\infty; 3] = [-6; 3]$$

Ejercicio 5

Determinar el dominio de definición de la función $f(x) = x - ln(x^2 + 1)$ y hallar los puntos de intersección entre su derivada e $y = 2$.

Solución y comentarios

Primero vamos a calcular el dominio de la función f. En este caso tenemos que

$$Dom(f) = R$$

La derivada de la función f es

$$f^{'}(x) = 1 - \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{x^2+1-2x}{x^2+1}.$$

Ahora debemos hallar los puntos de intersección de su derivada e $y = 2$, es decir, debemos hallar los valores x para los cuales $f^{'}(x) = 2$:

$$f^{'}(x) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} = 2$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+1-2x}{x^2+1} &= 2 \\
x^2+1-2x &= 2 \cdot (x^2+1) \\
x^2+1-2x &= 2x^2+2 \\
x^2+1-2x-2x^2-2 &= 0 \\
-x^2-2x-1 &= 0 \\
x^2+2x+1 &= 0
\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación cuadrática se obtiene la raíz doble $x = -1$.

Por lo tanto, el punto buscado es:

$$P = (-1; 2).$$