TEMA 1

Ejercicio 1 (2 puntos)

Sea $f(x)=\frac{10}{x-4}+4$. Hallar $a\in\mathbb{R}$ tal que $f(a)=9$. Para el valor encontrado, hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $(a;f(a))$

Respuesta

$$f(a)=9 \iff \frac{10}{a-4}+4=9 \iff \frac{10}{a-4}=5 \iff 10=5(a-4) \iff 10=5a-20 \iff 30=5a$$

$$\iff a = 6$$

Debemos buscar la recta tangente al gráfico que pasa por $(6;\ 9)$

La pendiente de la recta tangente en ese punto es el valor de $f'(6)$

$$f'(x)=-\frac{10}{(x-4)^2} \Rightarrow f'(6)=-\frac{10}{(6-4)^2} \Rightarrow f'(6)=-\frac{5}{2}$$

Calculemos ahora la ordenada al origen:

$$y=-\frac{5}{2}x+b$$

$$9=-\frac{5}{2}.6+b \Rightarrow b=24$$

Finalmente la recta tangente a f en el punto $(6;\ 9)$ es

$$y=-\frac{5}{2}x+24$$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Hallar los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento, máximos y/o mínimos de la función

$$f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{5}x+2}$$

Respuesta

Para hallar lo pedido primero debemos buscar la función derivada.

$$g´(x) = 2xe^{-\frac{1}{5}x+2} + x^2 e^{-\frac{1}{5}x+2}\left(-\frac{1}{5}\right) = xe^{-\frac{1}{5}x+2}(2 - \frac{1}{5}x)$$

Los puntos críticos de g son aquellos valores que no están en el dominio de la función derivada o la anulan.

Como el dominio de la derivada son todos los números reales los, los puntos críticos serán únicamente los que anulen dicha función.

Entonces,

$$g´(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad xe^{-\frac{1}{5}x+2}\left(2 - \frac{1}{5}x\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \text{ ó } \ 2 - \frac{1}{5}x = 0$$

$$2 - \frac{1}{5}x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 10$$

Utilizamos el criterio de la derivada primera para hallar los intervalos de crecimiento/decrecimiento de la función. Si el signo de la derivada primera es negativo en un intervalo la función será decreciente y si el signo de la derivada primera es positivo la función será creciente. Debemos analizar que sucede en los intervalos

$$(-\infty; 0)\,,(0; 10)\,,(10; +\infty)$$

En el intervalo $(-\infty; 0)$ tenemos que $g´(-1) < 0$, entonces es decreciente.

En el intervalo $(0; 10)$ tenemos que $g´(1) > 0$, entonces es creciente.

En el intervalo $(10; +\infty)$ tenemos que $g´(11) < 0$, entonces es decreciente

El intervalo de crecimiento es $(0; 10)$

Los intervalos de decrecimiento son $(-\infty; 0)$ y $(10; +\infty)$

El mínimo relativo es: $(0; g(0)) = (0;\ 0)$

El máximo relativo es: $(10;\ g(10)) = (10;\ 100)$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Hallar los valores de $x \in [\pi; 3\pi]$ para los cuales $h(x) = -1$ siendo

$$h(x) = sen\left(4x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

Respuesta

Debemos hallar los valores de $x \in [\pi; 3\pi]$ para los cuales $h(x) = -1$.

$$sen\left(4x + \frac{3\pi}{2}\right) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 4x + \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 2k\pi x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{k\pi}{2}$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

Debemos hallar ahora los valores de k para los cuales $x = \frac{k\pi}{2} \in [\pi; 3\pi]$.

Estos valores son: $2, 3, 4, 5\ y\ 6$.

Con lo que los valores de $x \in [\pi; 3\pi]$ donde $h(x) = -1$ son: $\left\{\pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi; \frac{5\pi}{2}; 3\pi\right\}$.

Ejercicio 4 (3 puntos)

Hallar el área de la región encerrada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = 3x \qquad g(x) = x^2$$

Respuesta

Veamos dónde se intersecan ambas funciones:

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad 3x = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0\ o\ x = 3$$

Luego, los gráficos de ambas funciones se intersecan en los puntos (0; 0) y (3; 9).

Y es entre esos valores que hay que calcular el área:

$$Area = \int_0^3 (3x - x^2)dx = \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\ |_0^3 = \frac{9}{2}$$

TEMA 2

EJERCICIO 1 (2 puntos)

Sea $f(x) = 8 + 5\ln(x^2 + 4)$.

Hallar las abscisas de los puntos del gráfico de f en los cuales la recta tangente tiene pendiente 2.

Respuesta

La ecuación de la recta tangente en el punto $(x_0; f(x_0))$ es

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Como queremos que la pendiente valga 2

$$f'(x_0) = 2$$

Buscamos para que valores la derivada de la función vale 2.

Primero hallamos la derivada de la función

$$f'(x) = 5\frac{1}{x^2 + 4}2x$$

Ahora buscamos los valores para los cuales $f'(x) = 2$

$$f'(x) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 5\frac{1}{x^2 + 4}2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 4 = 5x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 1 \; o \; x = 4$$

En los puntos $(1; f(1))$ y $(4; f(4))$ la pendiente de la recta tangente vale 2.

Ejercicio 2 (3 puntos)

Dada la función

$$g(x) = e^{2x^2 + ax + 6}$$

Determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual la función tiene un extremo en $x = 1$. Decidir si es un máximo o mínimo.

Respuesta

Como la función $g(x)$ tiene un extremo en $x = 1$, su derivada se anula en $x = 1$.

Calculemos $g'(x)$:

$$g'(x) = e^{2x^2+ax+6}(4x+a)$$
$$g'(1) = e^{2+a+6}(4+a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4+a=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=-4$$

Entonces

$$g'(x) = e^{2x^2+ax+6}(4x-4)$$

Como $x = 1$ es el único punto crítico (la derivada primera está definida en el conjunto de los números reales y la única posibilidad de que se anula es cuando el polinomio que acompaña a la exponencial se anule) analizamos el signo de la derivada primera antes y después de $x = 1$.

Para valores de $x \in (-\infty; 1)$ tenemos que $g'(x) < 0$ (la función es decreciente)

Para valores de $x \in (-1; +\infty)$ tenemos que $g'(x) > 0$ (la función es creciente)

Por lo tanto la función tiene un mínimo en el punto $(1; g(1))$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Calcular

$$\int xsen(5x^2-2)\,dx$$

Respuesta

Resolvemos la integral utilizando el método de sustitución.

$$5x^2 - 2 = u$$
$$10x\,dx = du$$
$$xdx = \frac{1}{10}du$$

$$\int x\,sen(5x^2-2)dx = \int \frac{1}{10} sen(u)du = \frac{1}{10}\int sen(u)du = \frac{1}{10}(-\cos(u)) + C$$

Luego

$$\int x\,sen(5x^2-2)\,dx = -\frac{1}{10}\cos(5x^2-2) + C$$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Sea $h(x) = 4sen(2x) - 1$.

Hallar el conjunto Imagen de la función h y todos los valores de x para los cuales $h(x) = 1$

Respuesta

La función seno tiene como conjunto imagen al intervalo $[-1; 1]$, entonces al multiplicarlo por 4 el conjunto imagen será el intervalo $[-4; 4]$ y al restar 1, tendremos:

$$Im\ (h) = \ [-5; 3]$$

Buscamos los valores de x para los cuales $h(x) = 1$:

$$4sen(2x) - 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4sen(2x) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad sen(2x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ó} \quad 2x = \frac{4\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \text{ó} \quad x = \frac{2\pi}{6} + k\pi$$

con $k \in \mathbb{Z}$