TEMA 2

EJERCICIO 1 (2 puntos)

Hallar f^{-1} siendo

$$f(x) = \frac{x-4}{5x+3}$$

y el **dominio de cada una** de las funciones.

Respuesta

Primero hallemos el dominio de la función. Como se trata de una función racional, debemos considerar que el denominador no puede valer 0, por lo cual realizamos el análisis para hallar el dominio.

$5x + 3 \neq 0$

$$x \neq -\frac{3}{5}$$

Por lo cual $Dom(f) = R - \left\{-\frac{3}{5}\right\}$

La función tiene una asíntota horizontal en $y = \frac{1}{5}$, entonces $Imagen(f) = R - \left\{\frac{1}{5}\right\}$

Ahora sí, podemos buscar la función inversa para lo cual primero podemos realizar un cambio de variable.

$$x = \frac{y-4}{5y+3}$$

$$x(5y+3) = y - 4$$

$$5xy + 3x = y - 4$$

$$5xy - y = -4 - 3x$$

$$y(5x-1) = -4 - 3x$$

$$y = \frac{-4-3x}{5x-1}$$

Por lo cual

$$f^{-1}(x) = \frac{-4-3x}{5x-1}$$

La función inversa está bien definida siempre y cuando su denominador no se anule, es decir,

$$5x - 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \frac{1}{5}$$

Entonces, $Dom(f^{-1}) = R - \left\{\frac{1}{5}\right\}$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Sea $\boldsymbol{P(x)}$ un polinomio de **grado 4** con raíces en $\mathbf{3}, \mathbf{-2}$, $\mathbf{4}$ y $\boldsymbol{b}$.

Se sabe que $\boldsymbol{b > 0}$ y además que $\boldsymbol{P(6) = 2400}$.

Hallar la expresión del polinomio si se sabe que la distancia entre los puntos $(b; 0)$ y $(0; 3)$ es igual a $\sqrt{10}$.

Respuesta

Sabemos que el polinomio $\boldsymbol{P(x)}$ es de grado 4, y además conocemos sus raíces. Entonces, podemos expresarlo como

$$P(x) = a \cdot (x - 3) \cdot (x - (-2)) \cdot (x - 4) \cdot (x - b)$$

Como la distancia entre los puntos $(b; 0)$ y $(0; 3)$ es igual a $\sqrt{10}$ se tiene que

$$\sqrt{(b - 0)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{10}$$

$$(b - 0)^2 + (0 - 3)^2 = 10$$

$$b^2 + 9 = 10$$

$$b^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad b = 1 \text{ ó } \quad b = -1$$

Pero el enunciado nos dice que $\boldsymbol{b > 0}$, entonces la única solución que nos sirve es $b = 1$.

Entonces

$$P(x) = a \cdot (x - 3) \cdot (x + 2) \cdot (x - 4) \cdot (x - 1)$$

Para hallar el valor de la constante a usamos el hecho de que $\boldsymbol{P(6) = 2400}$

$$P(6) = a \cdot (6 - 3) \cdot (6 + 2) \cdot (6 - 4) \cdot (6 - 1) = a \cdot 3 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 5 = a \cdot 240$$

$$2400 = a \cdot 240 \quad \Leftrightarrow \quad a = 10$$

$$P(x) = 10 \cdot (x - 3) \cdot (x + 2) \cdot (x - 4) \cdot (x - 1)$$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Determinar el valor de $b \in \mathbb{R}$ tal que recta de ecuación $y = 3$ sea asíntota horizontal de la función

$$f(x) = \frac{9x^2 - 1}{bx^2 + 4}$$

Respuesta

Recordemos que para hallar la ecuación de la asíntota horizontal de una función, calculamos el límite cuando x tiende a ∞ de la función. Si el límite es finito, existe asíntota horizontal.

Para lo cual, lo primero que debemos hacer en este ejercicio es calcular el límite cuando x tiende a ∞ de la funció

$$\lim_{x\to\infty} \frac{9x^2 - 1}{ax^2 + 4}$$

En este caso se presenta un límite indeterminado del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Para salvar este tipo de indeterminación debemos dividir numerador y denominador por x al mayor exponente que aparezca en toda la expresión, simplificar todo lo que se pueda y luego resolver.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{9x^2 - 1}{x^2}}{\frac{ax^2 + 4}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{9x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{ax^2}{x^2} + \frac{4}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{9 - \frac{1}{x^2}}{a + \frac{4}{x^2}} = \frac{9}{a}$$

Como el enunciado nos afirma que la recta de ecuación $y = 3$, podemos igualar el resultado del cálculo del límite a 3

$$\frac{9}{a} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad a = 3$$

Por lo cual $a = 3$ es el valor pedido

Ejercicio 4 (3 puntos)

Dadas las funciones

$$g(x) = -4x + 4 \qquad h(x) = |2x - 12|$$

Hallar analíticamente el conjunto de negatividad de la función $(g \circ h)(x)$

Respuesta

Primero, determinamos la expresión de $fog(x)$

$$(goh)(x) = g\big(h(x)\big) = g(|2x - 12|) = -4 \cdot |2x - 12| + 4$$

Por lo tanto,

$$(goh)(x) = -4 \cdot |2x - 12| + 4$$

El dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales.

Se pide el conjunto de negatividad, es decir, los valores del dominio que tienen imágenes negativas. Entonces, buscamos aquellos valores de la variable x para los cuales se verifica que

$$(goh)(x) < 0$$

$$-4 \cdot |2x - 12| + 4 < 0$$

$$-4 \cdot |2x - 12| < -4$$

$$|2x - 12| > -4 : (-4)$$

$$|2x - 12| > 1$$

Por propiedades del módulo, podemos afirmar que:

$$|2x - 12| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 12 > 1 \quad \text{ó} \quad 2x - 12 < -1$$

$$2x - 12 > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x > 13 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{13}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(\frac{13}{2}; +\infty\right)$$

$$2x - 12 < -1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x < 11 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{11}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty; \frac{11}{2}\right)$$

Luego, $C^- = \left(\frac{13}{2}; +\infty\right) \cup \left(-\infty; \frac{11}{2}\right)$