Universidad de Buenos Aires

UBA XXI

TEMA 1

EJERCICIO 1 (3 puntos)

Encontrar el conjunto de positividad de la función $(f \circ g)(x)$ siendo $f(x) = -2x^2 + 8$ y $g(x)$ la función lineal que pasa por los puntos $P = (1; -2)$ y $Q = (4; 1)$.

Respuesta

Primero debemos hallar la función lineal $g(x) = mx + b$ que pasa por los puntos $P = (1; -2)$ y $Q = (4; 1)$.

Planteamos un sistema teniendo en cuenta los puntos por donde pasa

$$-2 = m \cdot 1 + b \ \ (el\ punto\ P\ pertenece\ a\ la\ gráfica\ de\ la\ función)$$

$$1 = m \cdot 4 + b \ \ (el\ punto\ Q\ pertenece\ a\ la\ gráfica\ de\ la\ función)$$

De la primera ecuación despejamos b

$$b = -2 - m$$

Reemplazamos en la segunda

$$1 = m \cdot 4 + (-2 - m) \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 2 = 3 \cdot m \quad \Leftrightarrow \quad m = 1 \quad \Rightarrow \quad b = -3$$

La función lineal es

$$g(x) = x - 3$$

Ahora debemos hallar la composición $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x - 3) = -2(x - 3)^2 + 8$$

Para hallar el conjunto de positividad necesitamos primero encontrar las raíces de $f \circ g$

$$-2(x-3)^2 + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x-3)^2 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{4} \quad \Leftrightarrow \quad |x - 3| = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad x - 3 = 2 \quad ó \quad x - 3 = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5 \quad ó \quad x = 1$$

Evaluamos qué sucede con el signo de la función tomando un valor cualquiera que se encuentre dentro del intervalo generado por dos raíces consecutivas.

Debemos analizar que signo toma la función $(f \circ g)(x) = -2(x - 3)^2 + 8$ en los intervalos

$$(-\infty, 1)\ ;\ (1,5)\ ;\ (5; +\infty)$$

- En el intervalo $(-\infty, 1)$ la función toma valores negativos ya que $f(0) < 0$
- En el intervalo $(1,5)$ la función toma valores positivos ya que $f(2) > 0$

- En el intervalo $(5;+\infty)$ la función toma valores positivos ya que $f(6) < 0$

Entonces, el intervalo de positividad es $C^{+} = (1,5)$

Otra manera:

Como el gráfico de la función $(f \circ g)(x) = -2(x-3)^2 + 8$ es cóncavo hacia abajo, deducimos que el conjunto de positividad es el intervalo (1; 5).

Ejercicio 2 (2 puntos)

Dada la función lineal $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$ escribir como intervalo o como unión de intervalos al conjunto:

$A = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{f(x)}{x} \leq 2\right\}$

Respuesta

Debemos resolver la inecuación

$$\frac{f(x)}{x} \leq 2$$

$$\frac{-\frac{1}{3}x + 1}{x} \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-\frac{1}{3}x + 1}{x} - 2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-\frac{1}{3}x + 1 - 2x}{x} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-\frac{7}{3}x + 1}{x} \leq 0$$

Notar que el denominador nunca puede tomar el valor cero.

Se dan dos casos posibles:

Caso I:

$-\frac{7}{3}x + 1 \leq 0$ y además $x > 0$

$$-\frac{7}{3}x + 1 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{7}{3}x \leq -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7}{3}x \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \frac{3}{7} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[\frac{3}{7}, +\infty\right)$$

$$x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (0, +\infty)$$

Los valores de la variable que cumplen ambas condiciones son los que pertenecen a la intersección de ambos intervalos, es decir,

PRIMER TURNO

$x \in \left[\frac{3}{7}, +\infty\right) \cap (0, +\infty) = \left[\frac{3}{7}, +\infty\right)$

Caso II:

$-\frac{7}{3}x + 1 \geq 0$ y además $x < 0$

$-\frac{7}{3}x + 1 \geq 0 \iff -\frac{7}{3}x \geq -1 \iff \frac{7}{3}x \leq 1 \iff x \leq \frac{3}{7} \iff x \in \left(-\infty, \frac{3}{7}\right]$

$x < 0 \iff x \in (-\infty, 0)$

Los valores de la variable que cumplen ambas condiciones son los que pertenecen a la intersección de ambos intervalos, es decir,

$x \in \left(-\infty, \frac{3}{7}\right] \cap (-\infty, 0) = (-\infty, 0)$

Finalmente, el conjunto solución del problema se puede expresar como:

$$A = \left[\frac{3}{7}, +\infty\right) \cup (-\infty, 0)$$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Dados los puntos $P = (a; 3)$ y $Q = (2; -1)$, hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la distancia entre P y Q sea igual a 5.

Respuesta

$$d(P, Q) = \sqrt{(2-a)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{5}$$

$(2-a)^2 + (-1-3)^2 = 5^2 \iff (2-a)^2 + 16 = 25 \iff (2-a)^2 = 9$

$\sqrt{(2-a)^2} = \sqrt{9} \iff |2-a| = 3 \iff 2-a = 3$ ó $2-a = -3$

Si $2 - a = 3$ entonces $a = -1$

Si $2 - a = -3$ entonces $a = 5$

Los valores posibles para a son -1 y 5

Ejercicio 4 (3 puntos)

Dada la función

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+x-a}$$

determinar $a \in \mathbb{R}$ para que $x = 1$ sea asíntota vertical de f. Hallar las ecuaciones de todas las asíntotas verticales de f.

Respuesta

Para que $x = 1$ sea asíntota vertical de f necesitamos que el denominador de la expresión $\frac{x+2}{x^2+x-a}$ se anule cuando reemplazamos x por 1, con lo cual

$$1^2 + 1 - a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2$$

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+x-2}$$

El otro valor de x candidato a ser asíntota vertical es otra raíz del denominador de la función. El denominador es una función cuadrática con lo cual sus ceros los podemos calcular como

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1\,, x_2 = -2$$

Que el denominador se anule es una condición necesaria pero no suficiente; para comprobar si $x = -2$ es una asíntota vertical debemos trabajar con el límite.

$$\lim_{x\to-2} \frac{x+2}{x^2+x-2} = \lim_{x\to-2} \frac{x+2}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to-2} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{3}$$

lo que muestra que $x = -2$ no es asíntota vertical

TEMA 2

Ejercicio 1 (2 puntos)

Dadas las funciones

$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 \qquad g(x) = 3x + 1$

escribir como intervalo o como unión de intervalos al conjunto:

$A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ (g \circ f)(x) < 2\}$

Respuesta

Primero debemos hallar la expresión de la función gof

$$(gof)(x) = g\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = 3\left(\frac{1}{2}x + 1\right) + 1 = \frac{3}{2}x + 3 + 1 = \frac{3}{2}x + 4$$

$$(gof)(x) = \frac{3}{2}x + 4$$

Planteamos la condición establecida en el conjunto A:

$$\frac{3}{2}x + 4 < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}x < -2 \quad \Leftrightarrow \quad x < (-2) \cdot \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x < -\frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$$

Entonces

$$A = \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Dada la función

$$f(x) = -\frac{5}{x-3} - a$$

encontrar el valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(2) = 1$. Hallar la expresión de la función f^{-1} y su dominio.

Respuesta

$$f(2) = -\frac{5}{2-3} - a = 1$$

Entonces

$$-\frac{5}{2-3}-a=1 \iff -\frac{5}{-1}-a=1 \iff 5-a=1 \iff a=4$$

Luego

$$f(x)=-\frac{5}{x-3}-4$$

Calculemos la función inversa de f:

$$-\frac{5}{x-3}-4=y$$

$$-\frac{5}{x-3}=y+4$$

$$-\frac{5}{y+4}=x-3$$

$$-\frac{5}{y+4}+3=x$$

Por lo tanto

$$f^{-1}(x)=-\frac{5}{x+4}+3$$

Para hallar el dominio de f^{-1} debemos pedir que su denominador no se anule, es decir,

$$x+4\neq 0 \iff x\neq -4$$

Entonces, Dom $f^{-1}=\mathbb{R}-\{-4\}$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Hallar la función cuadrática que satisface:

- La gráfica pasa por los puntos $A=(2;0)$ y $B=(0;6)$
- La abscisa del vértice está en $x_v=-1$

Respuesta

Sea f la función cuadrática que estamos buscando.

La gráfica de la función pasa por el punto $A=(2;0)$, entonces

$$f(2)=0 \quad \text{lo que nos está diciendo que en } x=2 \text{ hay una raíz } de\ f$$

Si x_v es la abscisa del vértice, $x_1 = 2$ es una raíz y x_2 es la otra raíz

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = x_v \quad \Rightarrow \quad \frac{2 + x_2}{2} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 2 + x_2 = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -4$$

Sabiendo cuales son las dos raíces trabajaremos con la expresión factorizada de la función cuadrática:

$f(x) = a(x+4)(x-2)$

Considerando que la función pasa por el punto (0; 6), tendremos en cuenta este dato para hallar el valor de a

$a(0+4)(0-2) = 6$

$a(-8) = 6$

$a = -\frac{3}{4}$

Finalmente se tiene que

$f(x) = -\frac{3}{4}(x+4)(x-2)$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Determinar el dominio de la función

$f(x) = \frac{8x-3}{2x+7}$

Hallar, en caso de existir, las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.

Respuesta

Para determinar el dominio de la función debemos pedir que el denominador no se anule, con lo cual

$$2x + 7 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -\frac{7}{2}$$

Luego $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-\frac{7}{2}\}$

La recta de ecuación $x = -\frac{7}{2}$ es candidata a asíntota vertical. Debemos calcular el límite de la función cuando x tiende a $-\frac{7}{2}$ y ver que es infinito

$$\lim_{x \to -\frac{7}{2}} \frac{8x-3}{2x+7} = \infty$$

ya que el denominador tiende a 0 y el numerador a -31.

Para encontrar el valor de la asíntota horizontal calculamos

PRIMER TURNO

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8x-3}{2x+7} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(8-\frac{3}{x})}{x(2+\frac{7}{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{(8-\frac{3}{x})}{(2+\frac{7}{x})} = 4$$

por lo cual la ecuación de la asíntota horizontal es $y = 4$

TEMA 3

EJERCICIO 1 (2 puntos)

Dada la función lineal $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ escribir como intervalo o como unión de intervalos al conjunto:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \ \ tal\ que \quad \frac{f(x)}{x} \leq 0\right\}$$

Respuesta

Primero vamos a hallar la expresión de

$$\frac{f(x)}{x}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}}{x}$$

Debemos ahora resolver la inecuación

$$\frac{-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}}{x} \leq 0$$

Tener en cuenta que el denominador nunca puede tomar el valor cero.

Se dan dos casos posibles:

Caso I:

$x > 0$ y además $-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \leq 0$

$$x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (0, +\infty)$$

$$-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}x \leq -\frac{7}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x \geq \frac{7}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 7 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [7, +\infty)$$

Los valores de la variable x que cumplen ambas condiciones son los que pertenecen a la intersección de ambos intervalos, es decir,

$$x \in (0, +\infty) \cap [7, +\infty) = [7, +\infty)$$

Caso II:

$x < 0$ y además $-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \geq 0$

$$x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 0)$$

$$-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}x\geq -\frac{7}{2} \quad \Leftrightarrow \frac{1}{2}x\leq \frac{7}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x\leq 7 \quad \Leftrightarrow \quad x\in(-\infty,7]$$

Los valores de la variable x que cumplen ambas condiciones son los que pertenecen a la intersección de ambos intervalos, es decir,

$x\in(-\infty,7]\cap(-\infty,0)=(-\infty,0)$

Finalmente, el conjunto A se puede expresar como:

$\boldsymbol{A=(-\infty,0)\cup[7,+\infty)}$

EJERCICIO 2 (3 puntos)

Hallar la función cuadrática $\boldsymbol{g(x)}$ cuyo gráfico tiene vértice en el punto $V=(1;-8)$ y que además verifica que $g(3)=-6$. Si $f(x)=x-10$, hallar el conjunto de positividad de la función $(f\circ g)(x)$.

Respuesta

Nos conviene trabajar con la expresión canónica de $g(x)$ ya que nos dan de dato las coordenadas del vértice, entonces $g(x)=a\,(x-1)^2-8$.

Sabiendo que $g(3)=-6$ nos permite calcular el coeficiente principal a:

$g(3)=a\,(3-1)^2-8=-6$ con lo cual $a=\frac{1}{2}$.

Luego $g(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2-8$.

Debemos componer f con g:

$$(f\circ g)(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2-8-10=\frac{1}{2}(x-1)^2-18.$$

Hallamos las raíces de $f\circ g$

$$\frac{1}{2}(x-1)^2-18=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(x-1)^2=18 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2=36$$

$\sqrt{(x-1)^2}=\sqrt{36} \quad \Leftrightarrow \quad |x-1|=6 \quad \Leftrightarrow \quad x-1=6$ ó $x-1=-6$

Si $x-1=6$ entonces $x=7$

Si $x-1=-6$ entonces $x=-5$

La función $f \circ g$ es una función cuadrática cuya gráfica es cóncava hacia arriba con lo que podemos asegurar que su conjunto de positividad es $(-\infty; -5) \cup (7; \infty)$.

Otra manera de determinar el conjunto de positividad es analizando el signo de la función en los intervalos determinados por las raíces.

EJERCICIO 3 (3 puntos)

Dada la función

$$f(x) = 2 - \frac{7}{2x+3}$$

hallar la función inversa f^{-1}, indicar su dominio.

Para la función $f(x)$ determinar, si existen, las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.

Respuesta

Calculemos f^{-1}:

$$2 - \frac{7}{2x+3} = y$$

$$2 - y = \frac{7}{2x+3}$$

$$2x + 3 = \frac{7}{2-y}$$

$$2x = \frac{7}{2-y} - 3$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{2-y} - 3\right)$$

$$x = \frac{7}{4-2y} - \frac{3}{2}$$

Luego

$$f^{-1}(x) = \frac{7}{4-2x} - \frac{3}{2}$$

Para calcular el dominio de $f^{-1}(x)$, pedimos que el denominador de la primer fracción no se anule:

$$4 - 2x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 2$$

$\mathrm{Dom} f^{-1} = \mathbb{R} - \{2\}$

Nos piden calcula r las asíntotas de la función f . Para esto nos basamos en el cálculo de límites.

Asíntota vertical

El candidato a ser AV es $x = -\frac{3}{2}$, ya que en este valor se anula el denominador en la función f, pero debemos justificarlo calculando el límite:

$$\lim_{x \to -\frac{3}{2}} 2 - \frac{7}{2x+3} = \lim_{x \to -\frac{3}{2}} \frac{2(2x+3)-7}{2x+3} = \lim_{x \to -\frac{3}{2}} \frac{4x - -1}{2x+3} = \infty$$

Luego $x = -\frac{3}{2}$ es la ecuación de la asíntota vertical.

Para ver la existencia de asíntota horizontal calculamos el límite cuando x tiende a ∞

$$\lim_{x \to \infty} 2 - \frac{7}{2x+3} = 2$$

con lo que aseguramos que $y = 2$ es la ecuación de la asíntota horizontal.

EJERCICIO 4 (2 puntos)

Dado el punto $Q = (1;2)$, hallar todos los puntos de la forma $P = (a; a+2)$ tales que la distancia entre P y Q es $\sqrt{5}$.

Respuesta

La distancia entre los puntos P y Q es

$d(Q,P) = \sqrt{(1-a)^2 + (2-(a+2))^2}$

Entonces

$$\sqrt{(1-a)^2 + (2-(a+2))^2} = \sqrt{5}$$

$$(1-a)^2 + \left(2-(a+2)\right)^2 = 5$$

$$(1-a)^2 + (-a)^2 = 5$$

$$1 - 2a + a^2 + a^2 = 5$$

$$1 - 2a + 2a^2 = 5$$

$$-4 - 2a + 2a^2 = 0$$

Las raíces dela ecuación cuadrática son:

$$a_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{4} = \frac{2 \pm 6}{4}$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = 2 \qquad a_2 = -1$$

Entonces hay dos posibles puntos P que cumplen la condición pedida

$P = (2; 4)$ y $P = (-1; 1)$.

TEMA 4

Ejercicio 1 (3 puntos)

Dada la función

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+x-a}$$

determinar $a \in \mathbb{R}$ para que $x = 1$ sea asíntota vertical de f.

Hallar las ecuaciones de todas las asíntotas de f.

Respuesta

Para que $x = 1$ sea asíntota vertical de f necesitamos que el denominador de la expresión $\frac{x+2}{x^2+x-a}$ se anule cuando reemplazamos x por 1, con lo cual

$$1^2 + 1 - a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2$$

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+x-2}$$

El otro valor de x candidato a ser asíntota vertical es otra raíz del denominador de la función. El denominador es una función cuadrática con lo cual sus ceros los podemos calcular como

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1\,, x_2 = -2$$

Que el denominador se anule es una condición necesaria pero no suficiente; para comprobar si $x = -2$ es una asíntota vertical debemos trabajar con el límite.

$$\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2+x-2} = \lim_{x\to -2} \frac{x+2}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to -2} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{3}$$

lo que muestra que $x = -2$ no es asíntota vertical

Para ver si tiene asíntota horizontal debemos calcular

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{x^2+x-2} = 0$$

Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$

Ejercicio 2 (2 puntos)

Dados los puntos $P=(a;3)$ y $Q=(2;-1)$, hallar todos los valores de $a\in\mathbb{R}$ para los cuales la distancia entre P y Q sea igual a 5.

Respuesta

$$d(P,Q)=\sqrt{(2-a)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{5}$$

$$(2-a)^2+(-1-3)^2=5^2 \quad\Leftrightarrow\quad (2-a)^2+16=25 \quad\Leftrightarrow\quad (2-a)^2=9$$

$$\sqrt{(2-a)^2}=\sqrt{9} \quad\Leftrightarrow\quad |2-a|=3 \quad\Leftrightarrow\quad 2-a=3 \text{ ó } 2-a=-3$$

Si $2-a=3$ entonces $a=-1$

Si $2-a=-3$ entonces $a=5$

Los valores posibles para $\boldsymbol{a}$ son $\boldsymbol{-1}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{5}$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Dada la función lineal $f(x)=-\frac{1}{3}x+1$ escribir como intervalo o como unión de intervalos al conjunto:

$A=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{f(x)}{x}\leq 2\right\}$

Respuesta

Debemos resolver la inecuación

$$\frac{f(x)}{x}\leq 2$$

$$\frac{-\frac{1}{3}x+1}{x}\leq 2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-\frac{1}{3}x+1}{x}-2\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-\frac{1}{3}x+1-2x}{x}\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-\frac{7}{3}x+1}{x}\leq 0$$

Notar que el denominador nunca puede tomar el valor cero.

Se dan dos casos posibles:

Caso I:

$-\frac{7}{3}x + 1 \leq 0$ y además $x > 0$

$$-\frac{7}{3}x + 1 \leq 0 \iff -\frac{7}{3}x \leq -1 \iff \frac{7}{3}x \geq 1 \iff x \geq \frac{3}{7} \iff x \in \left[\frac{3}{7}, +\infty\right)$$

$$x > 0 \iff x \in (0, +\infty)$$

Los valores de la variable que cumplen ambas condiciones son los que pertenecen a la intersección de ambos intervalos, es decir,

$$x \in \left[\frac{3}{7}, +\infty\right) \cap (0, +\infty) = \left[\frac{3}{7}, +\infty\right)$$

Caso II:

$-\frac{7}{3}x + 1 \geq 0$ y además $x < 0$

$$-\frac{7}{3}x + 1 \geq 0 \iff -\frac{7}{3}x \geq -1 \iff \frac{7}{3}x \leq 1 \iff x \leq \frac{3}{7} \iff x \in \left(-\infty, \frac{3}{7}\right]$$

$$x < 0 \iff x \in (-\infty, 0)$$

Los valores de la variable que cumplen ambas condiciones son los que pertenecen a la intersección de ambos intervalos, es decir,

$$x \in \left(-\infty, \frac{3}{7}\right] \cap (-\infty, 0) = (-\infty, 0)$$

Finalmente, el conjunto solución del problema se puede expresar como:

$$A = \left[\frac{3}{7}, +\infty\right) \cup (-\infty, 0)$$

EJERCICIO 4 (3 puntos)

Encontrar el conjunto de positividad de la función $(f \circ g)(x)$ siendo $f(x) = -2x^2 + 8$ y $g(x)$ la función lineal que pasa por los puntos $P = (1; -2)$ y $Q = (4; 1)$.

Respuesta

Primero debemos hallar la función lineal $g(x) = mx + b$ que pasa por los puntos $P = (1; -2)$ y $Q = (4; 1)$.

Planteamos un sistema teniendo en cuenta los puntos por donde pasa

$$-2 = m \cdot 1 + b \;\; (el\ punto\ P\ pertenece\ a\ la\ gráfica\ de\ la\ función)$$

$$1 = m \cdot 4 + b \;\; (el\ punto\ Q\ pertenece\ a\ la\ gráfica\ de\ la\ función)$$

De la primera ecuación despejamos b

$$b = -2 - m$$

Reemplazamos en la segunda

$$1 = m \cdot 4 + (-2 - m) \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 2 = 3 \cdot m \quad \Leftrightarrow \quad m = 1 \quad \Longrightarrow \quad b = -3$$

La función lineal es

$$g(x) = x - 3$$

Ahora debemos hallar la composición $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x-3) = -2(x-3)^2 + 8$$

Para hallar el conjunto de positividad necesitamos primero encontrar las raíces de $f \circ g$

$$-2(x-3)^2 + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x-3)^2 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{4} \;\Leftrightarrow\; |x-3| = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad x - 3 = 2 \quad ó \quad x - 3 = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5 \quad ó \quad x = 1$$

Evaluamos qué sucede con el signo de la función tomando un valor cualquiera que se encuentre dentro del intervalo generado por dos raíces consecutivas.

Debemos analizar que signo toma la función $(f \circ g)(x) = -2(x-3)^2 + 8$ en los intervalos

$$(-\infty, 1)\ ;\ (1{,}5)\ ;\ (5; +\infty)$$

- En el intervalo $(-\infty, 1)$ la función toma valores negativos ya que $f(0) < 0$
- En el intervalo $(1{,}5)$ la función toma valores positivos ya que $f(2) > 0$
- En el intervalo $(5; +\infty)$ la función toma valores positivos ya que $f(6) < 0$

Entonces, el intervalo de positividad es $C^+ = (1{,}5)$

Otra manera:

Como el gráfico de la función $(f \circ g)(x) = -2(x-3)^2 + 8$ es cóncavo hacia abajo, deducimos que el conjunto de positividad es el intervalo (1; 5).

TEMA 5

Ejercicio 1 (2 puntos)

Hallar la función cuadrática que satisface:

- La gráfica pasa por los puntos $A = (2;0)$ y $B = (0;6)$
- La abscisa del vértice está en $x_v = -1$

Respuesta

Sea f la función cuadrática que estamos buscando.

La gráfica de la función pasa por el punto $A = (2;0)$, entonces

$$f(2) = 0 \quad \text{lo que nos está diciendo que en } x = 2 \text{ hay una raíz } de\ f$$

Si x_v es la abscisa del vértice, $x_1 = 2$ es una raíz y x_2 es la otra raíz

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = x_v \quad \Rightarrow \quad \frac{2 + x_2}{2} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 2 + x_2 = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -4$$

Sabiendo cuales son las dos raíces trabajaremos con la expresión factorizada de la función cuadrática:

$f(x) = a(x+4)(x-2)$

Considerando que la función pasa por el punto (0; 6), tendremos en cuenta este dato para hallar el valor de a

$a(0+4)(0-2) = 6$

$a(-8) = 6$

$a = -\frac{3}{4}$

Finalmente se tiene que

$f(x) = -\frac{3}{4}(x+4)(x-2)$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Determinar el dominio de la función

$f(x) = \frac{8x-3}{2x+7}$

Hallar, en caso de existir, las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.

Respuesta

Para determinar el dominio de la función debemos pedir que el denominador no se anule, con lo cual

$$2x + 7 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -\frac{7}{2}$$

Luego $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-\frac{7}{2}\}$

La recta de ecuación $x = -\frac{7}{2}$ es candidata a asíntota vertical. Debemos calcular el límite de la función cuando x tiende a $-\frac{7}{2}$ y ver que es infinito

$$\lim_{x \to -\frac{7}{2}} \frac{8x - 3}{2x + 7} = \infty$$

ya que el denominador tiende a 0 y el numerador a -31.

Para encontrar el valor de la asíntota horizontal calculamos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{8x - 3}{2x + 7} = \lim_{x \to \infty} \frac{x(8 - \frac{3}{x})}{x(2 + \frac{7}{x})} = \lim_{x \to \infty} \frac{(8 - \frac{3}{x})}{(2 + \frac{7}{x})} = 4$$

por lo cual la ecuación de la asíntota horizontal es $y = 4$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Dadas las funciones

$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 \qquad g(x) = 3x + 1$

escribir como intervalo o como unión de intervalos al conjunto:

$A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ (g \circ f)(x) < 2\}$

Respuesta

Primero debemos hallar la expresión de la función gof

$$(gof)(x) = g\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = 3\left(\frac{1}{2}x + 1\right) + 1 = \frac{3}{2}x + 3 + 1 = \frac{3}{2}x + 4$$

$$(gof)(x) = \frac{3}{2}x + 4$$

Planteamos la condición establecida en el conjunto A:

$$\frac{3}{2}x+4<2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}x<-2 \quad \Leftrightarrow \quad x<(-2)\cdot\frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x<-\frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x\in\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)$$

Entonces

$$A=\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)$$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Dada la función

$$f(x)=-\frac{5}{x-3}-a$$

encontrar el valor de $a\in\mathbb{R}$ tal que $f(2)=1$. Hallar la expresión de la función f^{-1} y su dominio.

Respuesta

$$f(2)=-\frac{5}{2-3}-a=1$$

Entonces

$$-\frac{5}{2-3}-a=1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{5}{-1}-a=1 \quad \Leftrightarrow \quad 5-a=1 \quad \Leftrightarrow \quad a=4$$

Luego

$$f(x)=-\frac{5}{x-3}-4$$

Calculemos la función inversa de f:

$$-\frac{5}{x-3}-4=y$$

$$-\frac{5}{x-3}=y+4$$

$$-\frac{5}{y+4}=x-3$$

$$-\frac{5}{y+4}+3=x$$

Por lo tanto

$$f^{-1}(x) = -\frac{5}{x+4} + 3$$

Para hallar el dominio de f^{-1} debemos pedir que su denominador no se anule, es decir,

$$x + 4 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -4$$

Entonces, Dom $f^{-1} = \mathbb{R} - \{-4\}$

TEMA 6

EJERCICIO 1 (2 puntos)

Dado el punto $Q = (1; 2)$, hallar todos los puntos de la forma $P = (a; a + 2)$ tales que la distancia entre P y Q es $\sqrt{5}$.

Respuesta

La distancia entre los puntos P y Q es

$$d(Q, P) = \sqrt{(1-a)^2 + (2-(a+2))^2}$$

Entonces

$$\sqrt{(1-a)^2 + (2-(a+2))^2} = \sqrt{5}$$

$$(1-a)^2 + \left(2-(a+2)\right)^2 = 5$$

$$(1-a)^2 + (-a)^2 = 5$$

$$1 - 2a + a^2 + a^2 = 5$$

$$1 - 2a + 2a^2 = 5$$

$$-4 - 2a + 2a^2 = 0$$

Las raíces dela ecuación cuadrática son:

$$a_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{4} = \frac{2 \pm 6}{4}$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = 2 \quad a_2 = -1$$

Entonces hay dos posibles puntos P que cumplen la condición pedida

$P = (2; 4)$ y $P = (-1; 1)$.

EJERCICIO 2 (3 puntos)

Hallar la función cuadrática $\boldsymbol{g(x)}$ cuyo gráfico tiene vértice en el punto $V = (1; -8)$ y que además verifica que $g(3) = -6$. Si $f(x) = x - 10$, hallar el conjunto de positividad de la función $(f \circ g)(x)$.

Respuesta

Nos conviene trabajar con la expresión canónica de $g(x)$ ya que nos dan de dato las coordenadas del vértice, entonces $g(x) = a\,(x-1)^2 - 8$.

Sabiendo que $g(3) = -6$ nos permite calcular el coeficiente principal a:

$g(3) = a\,(3-1)^2 - 8 = -6$ con lo cual $a = \frac{1}{2}$.

Luego $g(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 8$.

Debemos componer f con g:

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 8 - 10 = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 18.$$

Hallamos las raíces de $f \circ g$

$$\frac{1}{2}(x-1)^2 - 18 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(x-1)^2 = 18 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = 36$$

$\sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{36} \quad \Leftrightarrow \quad |x-1| = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x-1 = 6$ ó $x-1 = -6$

Si $x - 1 = 6$ entonces $x = 7$

Si $x - 1 = -6$ entonces $x = -5$

La función $f \circ g$ es una función cuadrática cuya gráfica es cóncava hacia arriba con lo que podemos asegurar que su conjunto de positividad es $(-\infty; -5) \cup (7; \infty)$.

Otra manera de determinar el conjunto de positividad es analizando el signo de la función en los intervalos determinados por las raíces.

EJERCICIO 3 (3 puntos)

Dada la función

$$f(x) = 2 - \frac{7}{2x+3}$$

hallar la función inversa f^{-1}, indicar su dominio.

Para la función $f(x)$ determinar, si existen, las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.

Respuesta

Calculemos f^{-1}:

$$2 - \frac{7}{2x+3} = y$$

$$2 - y = \frac{7}{2x+3}$$

$$2x + 3 = \frac{7}{2-y}$$

$$2x = \frac{7}{2-y} - 3$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{2-y} - 3\right)$$

$$x = \frac{7}{4-2y} - \frac{3}{2}$$

Luego

$$f^{-1}(x) = \frac{7}{4-2x} - \frac{3}{2}$$

Para calcular el dominio de $f^{-1}(x)$, pedimos que el denominador de la primer fracción no se anule:

$$4 - 2x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 2$$

$\mathrm{Dom} f^{-1} = \mathbb{R} - \{2\}$

Nos piden calcula r las asíntotas de la función f . Para esto nos basamos en el cálculo de límites.

Asíntota vertical

El candidato a ser AV es $x = -\frac{3}{2}$, ya que en este valor se anula el denominador en la función f, pero debemos justificarlo calculando el límite:

$$\lim_{x \to -\frac{3}{2}} 2 - \frac{7}{2x+3} = \lim_{x \to -\frac{3}{2}} \frac{2(2x+3)-7}{2x+3} = \lim_{x \to -\frac{3}{2}} \frac{4x - -1}{2x+3} = \infty$$

Luego $x = -\frac{3}{2}$ es la ecuación de la asíntota vertical.

Para ver la existencia de asíntota horizontal calculamos el límite cuando x tiende a ∞

$$\lim_{x \to \infty} 2 - \frac{7}{2x+3} = 2$$

con lo que aseguramos que $y = 2$ es la ecuación de la asíntota horizontal.

EJERCICIO 4 (2 puntos)

Dada la función lineal $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ escribir como intervalo o como unión de intervalos al conjunto:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \;\; tal\ que \;\; \frac{f(x)}{x} \leq 0\right\}$$

Respuesta

Primero vamos a hallar la expresión de

$$\frac{f(x)}{x}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}}{x}$$

Debemos ahora resolver la inecuación

$$\frac{-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}}{x} \leq 0$$

Tener en cuenta que el denominador nunca puede tomar el valor cero.

Se dan dos casos posibles:

Caso I:

$x > 0$ y además $-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \leq 0$

$$x > 0 \iff x \in (0, +\infty)$$

$$-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \leq 0 \iff -\frac{1}{2}x \leq -\frac{7}{2} \iff \frac{1}{2}x \geq \frac{7}{2} \iff x \geq 7 \iff x \in [7, +\infty)$$

PRIMER TURNO

Los valores de la variable x que cumplen ambas condiciones son los que pertenecen a la intersección de ambos intervalos, es decir,

$$x \in (0, +\infty) \cap [7, +\infty) = [7, +\infty)$$

Caso II:

$x < 0$ y además $-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \geq 0$

$$x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 0)$$

$$-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}x \geq -\frac{7}{2} \quad \Leftrightarrow \frac{1}{2}x \leq \frac{7}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 7 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 7]$$

Los valores de la variable x que cumplen ambas condiciones son los que pertenecen a la intersección de ambos intervalos, es decir,

$$x \in (-\infty, 7] \cap (-\infty, 0) = (-\infty, 0)$$

Finalmente, el conjunto $\boldsymbol{A}$ se puede expresar como:

$\boldsymbol{A} = (-\infty, \mathbf{0}) \cup [\mathbf{7}, +\infty)$