TEMA 4

Ejercicio 1 (2 puntos)

Hallar las coordenadas del punto de la gráfica de la función $h(x) = \ln(2x^2 + x + 1) + 5x$ donde la pendiente de la recta tangente es igual a 5

Respuesta

El valor de la pendiente en el punto $(x_0; h(x_0))$ es igual a la derivada de la función evaluada en x_0.

La derivada de la función es

$$h'(x) = \frac{(4x+1)}{2x^2 + x + 1} + 5$$

Buscamos el valor de x_0 para el cual $h'(x_0) = 5$

$$h'(x_0) = \frac{(4x_0+1)}{2x_0^2 + x_0 + 1} + 5$$

Entonces

$$\frac{(4x_0+1)}{2x_0^2 + x_0 + 1} + 5 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(4x_0+1)}{2x_0^2 + x_0 + 1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x_0 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = -\frac{1}{4}$$

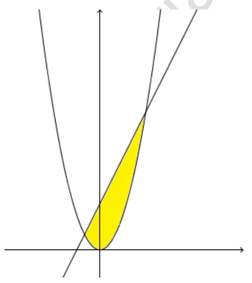
$$h\left(-\frac{1}{4}\right) = \ln\left(2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right) + 1\right) + 5\left(-\frac{1}{4}\right) = \ln\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 1\right) - \frac{5}{4} = \ln\left(\frac{7}{8}\right) - \frac{5}{4}$$

El punto es $\left(-\frac{1}{4}; \ln\left(\frac{7}{8}\right) - \frac{5}{4}\right)$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Calcular el área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$; $g(x) = 2x + 3$

Respuesta



SEGUNDO TURNO (22/11/2017)

Primero debemos hallar los puntos en donde se cruzan las gráficas de las funciones.

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 2x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

Hallamos las raíces de la cuadrática

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1\,, x_2 = 3$$

Para hallar el valor de “y” de los puntos donde se cruzan evaluamos en cualquiera de las dos funciones.

$f(-1) = 1$

$f(3) = 9$

Los puntos donde se cruzan las funciones son:

$(-1; 1)\,, (3; 9)$

Luego, el área es

$$\text{área} = \int_{-1}^{3} (2x+3) - (x^2)\,dx = \int_{-1}^{3} -x^2 + 2x + 3\,dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 3x\right)\Big|_{-1}^{3} = \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right)\Big|_{-1}^{3}$$

$$= \left(-\frac{3^3}{3} + 3^2 + 3 \cdot 3\right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 3 \cdot (-1)\right) = \frac{32}{3}$$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Dada la función exponencial $f(x) = 2^x - \frac{1}{2}$, determinar el conjunto de negatividad y positividad.

Respuesta

Ya que la función es continua, busquemos los ceros para poder aplicar el corolario del teorema de Bolzano.

$$2^x - \frac{1}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$$

Con lo que quedan determinados dos intervalos:

$(-\infty; -1)\ y\ (-1;\ +\infty)$

Por el corolario mencionado basta con hallar la imagen de un valor de cada intervalo:

Por ejemplo $f(-2) = 2^{-2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} < 0$, entonces la imagen para cualquier $x \in (-\infty; -1)$ es negativa y, como $f(0) = 2^0 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} > 0$, la imagen para cualquier $x \in (-1;\ +\infty)$ es positiva.

Finalmente deducimos que $C^- = (-\infty; -1)$ y $C^+ = (-1; +\infty)$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Hallar el conjunto imagen de la función $g(x) = -3sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$ y los valores de $x \in [-2\pi; 2\pi]$ para los cuales $g(x) = 4$

Respuesta

$-1 \leq sen\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) \leq 1$

$3 \geq -3sen\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) \geq -3$

$4 \geq -3sen\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + 1 \geq -2$

Luego el conjunto imagen de la función es el intervalo $[-2; 4]$

Ahora buscamos los valores de $x \in [-2\pi; 2\pi]$ para los cuales $g(x) = 4$

$$-3sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi + 2k\pi$$

Los valores de $k \in \mathbb{Z}$, para que el resultado de $x = \pi + 2k\pi$ pertenezca al intervalo $[-2\pi;\ 2\pi]$ son aquellos que cumplen que

$$-2\pi \leq \pi + 2k\pi \leq 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq 1 + 2k \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \leq 2k \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}$$

Los valores posibles para k son $-1, 0$.

Luego, los valores de $x \in [-2\pi; 2\pi]$ para los cuales $g(x) = 4$ son: $x = \pi$, $x = -\pi$

TEMA 5

Ejercicio 1 (2 puntos)

Dada la función $f(x) = e^{-x^2+5x+5}$, hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

Respuesta

El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales.

Para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento debe analizar el signo del a derivada primera.

La derivada de la función es

$$f'(x) = e^{x^2+5x+5}(2x-5)$$

El dominio de la función derivada también es el conjunto de todos los números reales.

Buscamos en primer los valores para los cuales se anula la derivada primera de la función

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x^2-5x-5}(2x-5) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x-5=0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{2}$$

Analizamos el signo de la derivada primera en los intervalos

$$\left(-\infty; \frac{5}{2}\right), \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$$

En el intervalo $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$ la derivada primera es negativa ya que si evaluamos en $0 \in \left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$ tenemos que $f'(0) < 0$

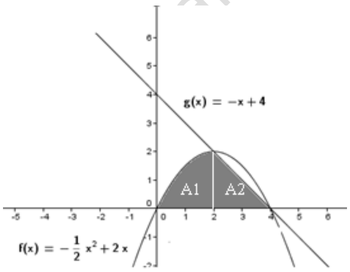
En el intervalo $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$ la derivada primera es positiva ya que si evaluamos en $5 \in \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$ tenemos que $f'(5) > 0$

Luego, la función es creciente en el intervalo , $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$ y decreciente en el intervalo$\left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Dado el siguiente gráfico, calcular el área de la zona sombreada

Respuesta



Hallamos los puntos de intersección entre las curvas dadas. Para ello igualamos las dos funciones,

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x = -x + 4$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + x - 4 = 0$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática

$$x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 4$$

El área total debemos descomponerla en dos recintos:

$$A = A_1 + A_2$$

$$A = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 0\right) dx + \int_2^4 (-x + 4 - 0) dx$$

$$A = \left(-\frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + 2\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 + \left(-\frac{x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_2^4$$

$$A = \left[\left(-\frac{1}{6}.8 + 4\right) - 0\right] + \left[\left(-\frac{4^2}{2} + 4 \cdot 4\right) - \left(-\frac{2^2}{2} + 4 \cdot 2\right)\right]$$

$$A = -\frac{4}{3} + 4 + [-8 + 16 - (-2 + 8)]$$

$$A = -\frac{4}{3} + 4 + 2 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{14}{3}$$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Dada la función $g(x) = \ln(x - 2) - 1$, hallar el conjunto de positividad y negatividad.

Respuesta

Primero hallamos el dominio de la función.

El logaritmo está bien definido si $x - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 2$. Entonces, el dominio de la función es el intervalo $(2;\ +\infty)$.

Hallemos el conjunto donde la función se anula (conjunto de ceros)

$\ln(x - 2) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x - 2) = 1 \Leftrightarrow x - 2 = e \Leftrightarrow x = e + 2$

Para aplicar el corolario del teorema de Bolzano, separamos al dominio en dos intervalos donde la función no se anula: $(2;\ e + 2) y\ (e + 2;\ +\infty)$.

Calculamos $g(e) = \ln(e-2) < 0$, ya que $e - 2 < 1$, con esto deducimos que todos los valores que corresponden al intervalo $(2;\ e+2)$ tienen imagen negativa.

En cambio, si calculamos la imagen para cualquier valor que pertenezca al intervalo $(e+2;\ +\infty)$ su imagen será positiva.

Finalmente $C^+ = (e+2;\ +\infty)$ y $C^- = (2; e+2)$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Hallar el conjunto imagen de la función $h(x) = 2cos(x-\pi) + 5$ y los valores de $x \in [-\pi; 3\pi]$ para los cuales $h(x) = 3$

Respuesta

Primero debemos hallar el conjunto imagen. Para ello partimos de que

$$-1 \leq cos(x-\pi) \leq 1$$

$$-2 \leq 2cos(x-\pi) \leq 2$$

$$3 \leq 2cos(x-\pi) + 5 \leq 7$$

El conjunto imagen de la función h es el intervalo $[3; 7]$.

Los valores del dominio donde $h(x) = 3$, los averiguamos resolviendo la ecuación:

$2cos(x-\pi) + 5 = 3 \Leftrightarrow cos(x-\pi) = -1 \Leftrightarrow x - \pi = \pi + 2k\pi, con\ k \in \mathbb{Z}$

Luego

$$x = 2\pi + 2k\pi, con\ k \in \mathbb{Z}$$

Por último debemos considerar que, de los valores anteriores, debemos quedarnos sólo con los que pertenezcan al intervalo $[-\pi; 3\pi]$

Debemos hallar los posibles valores de $k \in \mathbb{Z}$ para que se cumpla la condición.

Entonces pedimos que:

$$-\pi \leq x \leq 3\pi$$

$$-\pi \leq 2\pi + 2k\pi \leq 3\pi$$

$$-1 \leq 2 + 2k \leq 3$$

$$-3 \leq 2k \leq 1$$

$$-\frac{3}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}$$

Luego los valores posibles de k son -1 y 0. Entonces los valores de $x \in [-\pi; 3\pi]$ para los cuales $h(x) = 3$ son: $x = 0$ y $x = 2\pi$

TEMA 6

Ejercicio 1 (2 puntos)

Hallar el / los puntos del gráfico de la función $f(x) = e^{x^2-3x}$ en los cuales la recta tangente sea horizontal

Respuesta

El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales.

Debemos hallar los puntos de la forma $(x_0; f(x_0))$ donde la recta tangente sea horizontal, es decir, donde la pendiente de la recta es nula.

Sabemos que la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función en el punto $(x_0; f(x_0))$ es igual a la derivada de la función evaluada en x_0. Entonces, necesitamos hallar los valores del dominio de la función donde su derivada se anule.

La derivada de la función es:

$$f'(x) = e^{x^2-3x}(2x-3)$$

Entonces

$$f'(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x_0^2-3x_0}(2x_0-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_0 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{2}$$

(recordar que la función exponencial no se anula).

Para dar el punto debemos hallar el valor de $f\left(\frac{3}{2}\right)$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\left(\frac{3}{2}\right)} = e^{\left(\frac{9}{4}-\frac{9}{2}\right)} = e^{-\frac{9}{4}}$$

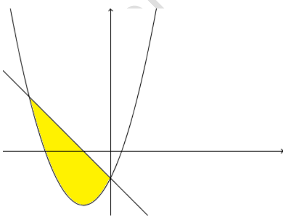
El punto del gráfico de la función es $\left(\frac{3}{2}; e^{-\frac{9}{4}}\right)$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Calcular el área encerrada entre las gráficas de las funciones

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 \quad ; \quad g(x) = -x - 1$$

Respuesta



Primero debemos hallar las abscisas de los puntos en donde se cruzan las gráficas de las funciones.

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 1 = -x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x+3) = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = 0\,, \qquad x = -3$$

Luego, el área es

$$área = \int_{-3}^{0} (-x-1) - (x^2 + 2x - 1)\,dx = \int_{-3}^{0} -x - 1 - x^2 - 2x + 1\,dx = \int_{-3}^{0} -x^2 - 3x\,dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right)\Big|_{-3}^{0}$$
$$= \left(-\frac{0^3}{3} - \frac{3\cdot 0^2}{2}\right) - \left(-\frac{(-3)^3}{3} - \frac{3(-3)^2}{2}\right) = \frac{9}{2}$$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Hallar el conjunto de positividad y negatividad de la función $f(x) = \ln(2x+3)$

Respuesta

Primero hallamos el dominio de la función. Para que la función logaritmo este bien definida debe ocurrir que

$$2x + 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -\frac{3}{2}$$

Entonces, el dominio de la función es el intervalo $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$

Hallemos el conjunto de ceros de la función:

$$ln(2x+3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$$

Para aplicar el corolario del teorema de Bolzano, separamos al dominio en dos intervalos donde la función no se anula: $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$. y $(-1;\ +\infty)$

En el intervalo $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$ la función es negativa ya que $-\frac{5}{4} \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right)$ y $f\left(-\frac{5}{4}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

En el intervalo $(-1;\ +\infty)$ la función es positiva ya que $0 \in (-1;\ +\infty)$ y $f(0) = \ln(3) > 0$

Entonces, $C^+ = (-1;\ +\infty)$ y $C^- = \left(-\frac{3}{2}; -1\right)$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Hallar el conjunto imagen de la función $f(x) = 2\,cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$ y los valores de $x \in [-2\pi; 2\pi]$ para los cuales $f(x) = 1$

Respuesta

Primero debemos hallar el conjunto imagen. Para ello partimos de que

$$-1 \leq cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \leq 1$$

$$-2 \leq 2cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \leq 2$$

$$-3 \leq 2cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-1 \leq 1$$

El conjunto imagen de la función h es el intervalo $[-3; 1]$.

Los valores del dominio donde $f(x) = 1$, los averiguamos resolviendo la ecuación:

$$2\ cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-1\ = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\ cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=2 \quad \Leftrightarrow \quad cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=1 \quad \Leftrightarrow \quad x+\frac{\pi}{2}=2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Luego

$$x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi, con\ k \in \mathbb{Z}$$

Por último debemos considerar que, de los valores anteriores, debemos quedarnos sólo con los que pertenezcan al intervalo $[-2\pi; 2\pi]$

Debemos hallar los posibles valores de $k \in \mathbb{Z}$ para que se cumpla la condición, entonces

$$-2\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$-2\pi \leq -\frac{\pi}{2}+2k\pi \leq 2\pi$$

$$-2 \leq -\frac{1}{2}+2k \leq 2$$

$$-\frac{1}{2} \leq 2k \leq \frac{5}{2}$$

$$-\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{5}{4}$$

Los valores posibles para k son: $0, 1$

Entonces, los valores de $x \in [-2\pi; 2\pi]$ para el cual $f(x) = 1$ son: $x=-\frac{\pi}{2}$ y $x=\frac{3\pi}{2}$