Universidad de Buenos Aires

UBAXXI

TEMA 3

Ejercicio 1 (2 puntos)

Para la función

$$h(x) = 1 + \frac{9-3x}{3x-2}$$

hallar el conjunto de negatividad.

Respuesta

Primero vamos a rescribir la función g.

$$h(x) = 1 + \frac{9-3x}{3x-2} = \frac{3x-2+9-3x}{3x-2} = \frac{7}{3x-2}$$

Planteamos (para hallar el conjunto de negatividad)

$$h(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7}{3x-2} < 0$$

Como el numerador es un número positivo, el cociente es negativo si y solo si el denominador es negativo:

$$3x-2<0 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$$

Conjunto de negatividad: $C^- = \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Determinar y justificar, usando el concepto de límite, si la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{3(x+8)(x-1)}$$

tiene como asíntotas las rectas de ecuación

$$y = \frac{1}{3} \quad ; \quad x = -8 \quad ; \quad x = 1$$

Respuesta

La recta de ecuación $y = \frac{1}{3}$ es una asíntota horizontal ya que el límite de la función cuando x tiende a infinito vale $\frac{1}{3}$.

Justificamos esto calculando el límite correspondiente:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{3(x+8)(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{3(x+8)(x-1)}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{3\left(1 + \frac{8}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{3}$$

ya que $\frac{1}{x}$ y $\frac{8}{x}$ tienden a cero cuando x tiende a infinito.

La recta de ecuación $x = 1$ no es una asíntota vertical ya que el límite de la función cuando x tiende 1 es finito.

Justificamos esta respuesta calculando el límite correspondiente

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{3(x+8)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{3(x+8)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)}{3(x+8)} = \frac{2}{27}$$

La recta de ecuación $x = -8$ es una asíntota vertical ya que el límite de la función cuando x tiende -8 es infinito.

Justificamos esta respuesta calculando el límite correspondiente

$$\lim_{x\to -8} \frac{x^2 - 1}{3(x+8)(x-1)} = \lim_{x\to -8} \frac{(x+1)(x-1)}{3(x+8)(x-1)} = \lim_{x\to -8} \frac{(x+1)}{3(x+8)} = \infty$$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Hallar un posible valor de la constante $a \in \mathbb{R}$ para el conjunto A esté contenido en el intervalo $(-\infty; 4)$ siendo $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |2x - 3| < 3a\}$

Respuesta

Resolvemos la inecuación.

Si la constante "a" es negativa el conjunto es vacío.

Pedimos que "a" ≥ 0

$$|2x - 3| < 3a \quad \Leftrightarrow \quad -3a < 2x - 3 < 3a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3 - 3a}{2} < x < \frac{3a + 3}{2}$$

Entonces

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |2x - 3| < 3a\} = \left(\frac{3 - 3a}{2}; \frac{3a + 3}{2}\right)$$

Para que el conjunto esté contenido en el intervalo $(-\infty; 4)$ debemos pedir que

$$\frac{3a + 3}{2} < 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3a + 3 < 8 \quad \Leftrightarrow \quad 3a < 5 \quad \Leftrightarrow \quad a < \frac{5}{3}$$

Entonces, la constante buscada debe cumplir simultáneamente las condiciones

$$a \geq 0 \ ; \ a < \frac{5}{3}$$

es decir, $a \in \left[0; \frac{5}{3}\right)$

Un valor posible es $a = \frac{1}{4}$

07/05/2018 – TEMA 3

Ejercicio 4 (3 puntos)

Las gráficas de las funciones $f(x) = 2x^2 - 3x - 4$; $g(x) = (x + 2)(x - 2)$ se cortan en los puntos A y P.

Calcular la distancia entre dichos puntos.

Respuesta

Hallamos los puntos de intersección entre las gráficas de las funciones f y g.

Primero hallamos las abscisas de los puntos de intersección

$$f(x) = g(x)$$

$$2x^2 - 3x - 4 = (x + 2)(x - 2)$$

$$2x^2 - 3x - 4 = x^2 - 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x - 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ó } x = 3$$

$$A = \big(0; g(0)\big) = (0; -4)$$

$$P = (3; g(3) = (3; 5)$$

$$d(A, P) = \sqrt{(0 - (3))^2 + (-4 - 5)^2} = \sqrt{3^2 + 9^2} = \sqrt{\mathbf{90}}$$