1. Hallar el o los valores de $x \in \mathbb{R}$ para que se verifique que $(f \circ g)(x) = f(x)$ siendo **(3 puntos)**

$$f(x) = e^x \;;\; g(x) = x^2 + 2x^3$$

Solución

Primero hallamos la función $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2 + 2x^3) = e^{x^2+2x^3}$$

Luego igualamos las expresiones:

$$(f \circ g)(x) = f(x)$$

$$e^{x^2+2x^3} = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x^3 = x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x^3 - x = 0$$

Ahora vamos a hallar los valores de $x \in \mathbb{R}$ que son solución de la última ecuación:

$$x^2 + 2x^3 - x = 0$$

$$2x^3 + x^2 - x = 0$$

$$x(2x^2 + x - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ó } 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$2x^2 + x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \text{ ó } x = \frac{1}{2}$$

Entonces, los valores de $x \in \mathbb{R}$ para que se verifique que $(f \circ g)(x) = f(x)$ son:

$$\left\{0; -1; \frac{1}{2}\right\}$$

2. Calcular la siguiente integral definida **(3 puntos)**

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\,sen(x) + e^{\frac{2x}{\pi}}\,dx$$

Solución

Vamos a calcular primero la primitiva

$$\int x\,sen(x) + e^{\frac{2x}{\pi}}\,dx = \int x\,sen(x)\,dx + \int e^{\frac{2x}{\pi}}\,dx =$$

Para calcular $\int x\,sen(x)\,dx$ utilizamos el método de integración por partes siendo

$$u = x \qquad v' = sen(x) \quad ; \quad u' = 1 \qquad v = -\cos(x)$$

$$\int x\,sen(x)\,dx = -x\cos(x) - \int -\cos(x)\,dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx = -x\cos(x) + sen(x) + C_1$$

Para calcular $\int e^{\frac{2x}{\pi}}\,dx$ utilizamos el método de sustitución:

$$s = e^{\frac{2x}{\pi}} \quad \Rightarrow \quad ds = \frac{2}{\pi}dx \quad \therefore \quad \frac{\pi}{2}ds = dx$$

$$\int e^{\frac{2x}{\pi}}\,dx = \int e^{s}\cdot\frac{\pi}{2}ds = \frac{\pi}{2}\int e^{s}\,ds = \frac{\pi}{2}e^{s} + C_2 = \frac{\pi}{2}e^{\frac{2x}{\pi}} + C_2$$

Entonces

$$\int x\,sen(x) + e^{\frac{2x}{\pi}}\,dx = -xcos(x) + sen(x) + \frac{\pi}{2}e^{\frac{2x}{\pi}} + C_1 + C_2$$

Finalmente

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\,sen(x) + e^{\frac{2x}{\pi}}\,dx = \left(-xcos(x) + sen(x) + \frac{\pi}{2}e^{\frac{2x}{\pi}}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \left(-\pi cos(\pi) + sen(\pi) + \frac{\pi}{2}e^{\frac{2\pi}{\pi}}\right) - \left(-(-\pi)cos(-\pi) + sen(-\pi) + \frac{\pi}{2}e^{\frac{2(-\pi)}{\pi}}\right) =$$

$$= \left(-\pi(-1) + 0 + \frac{\pi}{2}e^{2}\right) - \left(-(-\pi)(-1) + 0 + \frac{\pi}{2}e^{-2}\right) = \pi + \frac{\pi}{2}e^{2} + \pi - \frac{\pi}{2}e^{-2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}(e^{2} - e^{-2})$$

(las constantes C_1, C_2 se cancelan).

---

3. Hallar las ecuaciones de las asíntotas horizontales y/o verticales de la función **(2 puntos)**

$$f(x) = \frac{4x^2 - 1}{x^2 + x - 6}$$

Solución

Para hallar la ecuación de la asíntota horizontal calculamos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2 - 1}{x^2 + x - 6} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(4 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{x}{x^2} - \frac{6}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(4 - \frac{1}{x^2}\right)}{\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right)} = 4$$

ya que $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0.$

La ecuación de la asíntota horizontal es $y = 4$.

Las ecuaciones de las rectas que son candidatas a asíntotas verticales son aquellos valores en donde se anula el denominador.

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \iff x_{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 2\cdot(-6)}}{2\cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \iff x = -3 \text{ ó } x = 2$$

Las posibles ecuaciones de asíntotas verticales son:

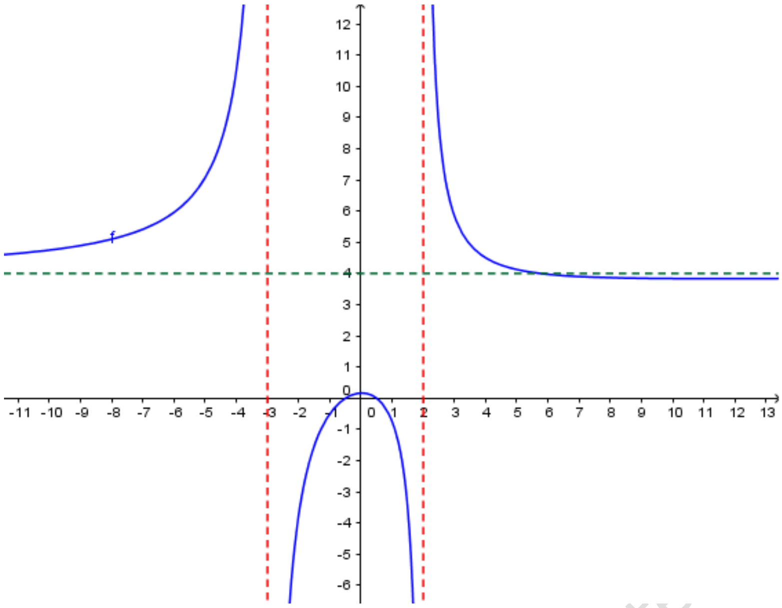
$$x = -3 \quad , \quad x = 2$$

Para ver si efectivamente lo son debemos calcular los límites correspondientes y ver que no dan un número finito:

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3}\frac{4x^2 - 1}{x^2 + x - 6} = \infty$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{4x^2 - 1}{x^2 + x - 6} = \infty$$

Entonces, las ecuaciones de las asíntotas verticales son: $x = -3,\ x = 2$



4. Sea $f(x) = a \cdot sen(\pi - 2x) + 1$. Hallar el valor de $a > 0$ para que $Im(f) = [-2; 4]$ y los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $f(x) = 4$ **(2 puntos)**

Solución

La condición $Im(f) = [-2; 4]$ quiere decir que $-2 \leq f(x) \leq 4$, entonces

$$-2 \leq a \cdot sen(\pi - 2x) + 1 \leq 4$$

Restamos -1 en todos los miembros de la desigualdad

$$-3 \leq a \cdot sen(\pi - 2x) \leq 3$$

Si pedimos que la constante sea positiva, por estar la función seno acotada entre -1 y 1, la única posibilidad es que $a = 3$.

Luego,

$$f(x) = 3sen(\pi - 2x) + 1$$

Ahora nos falta hallar los valores $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $f(x) = 4$.

$$f(x) = 4$$
$$3sen(\pi - 2x) + 1 = 4$$

Restamos 1 en ambos miembros de la igualdad

$$3sen(\pi - 2x) = 3$$

Dividimos por 3 en ambos miembros de la igualdad

$$sen(\pi - 2x) = 1$$

Entonces,

$$sen(\pi - 2x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \pi - 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \quad -2x = -\pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} - k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Luego, los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $f(x) = 4$ son aquellos valores de la forma

$$x = \frac{\pi}{4} - k\pi$$

con $k \in \mathbb{Z}$.