PRIMER TURNO (22/11/2017)

TEMA 1

Ejercicio 1 (2 puntos)

Hallar él o los puntos del gráfico de la función

$$f(x) = e^{x^2-3x}$$

para los cuales la recta tangente sea horizontal

Respuesta

El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales.

Debemos hallar los puntos de la forma $(x_0; f(x_0))$ donde la recta tangente sea horizontal, es decir, donde la pendiente de la recta es nula.

Sabemos que la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función en el punto $(x_0; f(x_0))$ es igual a la derivada de la función evaluada en x_0. Entonces, debemos hallar los valores del dominio de la función donde su derivada se anule.

La derivada de la función es:

$$f'(x) = e^{x^2-3x}(2x-3)$$

Entonces

$$f'(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x_0^2-3x_0}(2x_0-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_0 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{2}$$

(recordar que la función exponencial no se anula).

Para dar el punto debemos hallar el valor de $f\left(\frac{3}{2}\right)$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\left(\frac{3}{2}\right)} = e^{\left(\frac{9}{4}-\frac{9}{2}\right)} = e^{-\frac{9}{4}}$$

El punto del gráfico de la función es $\left(\frac{3}{2}; e^{-\frac{9}{4}}\right)$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Dada la función $g(x) = ln(2x-3a)$, hallar el valor de $a \in R$ si se sabe que el conjunto de negatividad de la función es el intervalo $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

Hallar el dominio de la función teniendo en cuenta el valor hallado de la constante a.

Respuesta

Sabemos que el conjunto de negatividad de la función $\ln(t)$ es el intervalo $(0; 1)$

Entonces, si

$$0 < 2x - 3a < 1$$

$$3a < 2x < 1 + 3a$$
$$\frac{3a}{2} < x < \frac{1+3a}{2}$$

El conjunto de negatividad de la función es el intervalo $\left(\frac{3a}{2}; \frac{1+3a}{2}\right)$ y por otro lado es igual a $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$

Entonces

$\frac{3a}{2} = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a = 1$

$\frac{1+3a}{2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 3a = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3a = 3 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1$

Luego

$g(x) = ln(2x - 3)$

El dominio de la función serán aquellos valores de x para los cuales

$2x - 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x > 3 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{3}{2}$

Dominio de la función es el intervalo $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Dada la función $f(x) = a\, sen(x + \pi) - 2$. Hallar el valor de la constante $a \in \mathbb{R}$ sabiendo que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2a + 1$

Respuesta

Se sabe que

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2a + 1$$

Por otro lado

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a\, sen\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) - 2 = a\, sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 2 = a(-1) - 2 = -a - 2$$

Entonces

$-2a + 1 = -a - 2$
$-2a + a = -2 - 1$
$-2a + a = -2 - 1$
$-a = -3$
$a = 3$

El valor de la constante es $a = 3$

PRIMER TURNO (22/11/2017)

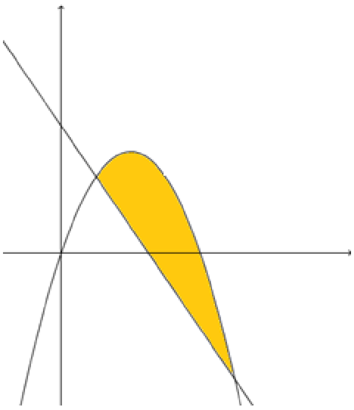
Ejercicio 4 (3 puntos)

El gráfico muestra el área encerrada entre las gráficas de las funciones

$$f(x) = -2x + 5, \qquad g(x) = -x^2 + 4x$$

Calcular el valor del área sombreada.

Respuesta



Primero debemos hallar los puntos en donde se cruzan las gráficas de las funciones.

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad -2x + 5 = -x^2 + 4x \quad \Leftrightarrow \quad -2x + 5 + x^2 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 5 = 0$$

Hallamos las raíces de la cuadrática

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1\,, x_2 = 5$$

Para hallar el valor de "y" de los puntos donde se cruzan evaluamos en cualquiera de las dos funciones.

$f(1) = -2(1) + 5 = 3$

$f(5) = -2(5) + 5 = -5$

Los puntos donde se cruzan las funciones son:

$(1; 3)\,, (5; -5)$

Luego, el área es

$$área = \int_1^5 (-x^2 + 4x) - (-2x + 5)\, dx = \int_1^5 -x^2 + 4x + 2x - 5\, dx = \int_1^5 -x^2 + 6x - 5\, dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 5x\right)\Bigg|_1^5 = \left(-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x\right)\Bigg|_1^5 = \left(-\frac{5^3}{3} + 3 \cdot 5^2 - 5 \cdot 5\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1\right) = \frac{32}{3}$$

TEMA 2

Ejercicio 1 (2 puntos)

Dada la función $f(x) = e^{x^2-5x-8}$ hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Respuesta

El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales.

Para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento debe analizar el signo del a derivada primera.

La derivada de la función es

$$f'(x) = e^{x^2-5x-8}(2x-5)$$

El dominio de la función derivada también es el conjunto de todos los números reales.

Buscamos en primer los valores para los cuales se anula la derivada primera de la función

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x^2-5x-8}(2x-5) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x-5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{2}$$

Analizamos el signo de la derivada primera en los intervalos

$$\left(-\infty; \frac{5}{2}\right), \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$$

En el intervalo $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$ la derivada primera es negativa ya que si evaluamos en $0 \in \left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$ tenemos que $f'(0) = -5 \cdot e^{-8} < 0$

En el intervalo $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$ la derivada primera es positiva ya que si evaluamos en $3 \in \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$ tenemos que $f'(3) = 1 \cdot e^{-14} > 0$

Luego, la función es creciente en el intervalo , $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$ y decreciente en el intervalo $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Dada la función $f(x) = ln(3a-4x)$, hallar el valor de $a \in R$ si se sabe que el conjunto de positividad de la función es el intervalo $(-\infty; 5)$.

Hallar el dominio de la función teniendo en cuenta el valor hallado de la constante a

Respuesta

Sabemos que el conjunto de positividad de la función $\ln(t)$ es el intervalo $(1; +\infty)$

Entonces, si

$$3a - 4x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad -4x > 1 - 3a \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{3a-1}{4}$$

El conjunto de positividad de la función es el intervalo $\left(-\infty;\frac{1-3a}{4}\right)$ y por otro lado es igual a $(-\infty;5)$

Entonces

$$\frac{3a-1}{4}=5 \quad \Leftrightarrow \quad 3a-1=20 \quad \Leftrightarrow \quad 3a=21 \quad \Leftrightarrow \quad a=7$$

Luego

$f(x)=ln(21-4x)$

El dominio de la función serán aquellos valores de x para los cuales

$$21-4x>0 \quad \Leftrightarrow \quad -4x>-21 \quad \Leftrightarrow \quad x<\frac{21}{4}$$

Dominio de la función es el intervalo $\left(-\infty;\frac{21}{4}\right)$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Dada la función $h(x)=3\ sen\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-1$, hallar los valores $x\in\mathbb{R}$ para los cuales $h(x)=2$

Respuesta

Nos piden hallar los valores $x\in\mathbb{R}$ para los cuales $h(x)=2$, que es lo mismo que pedir

$$3\ sen\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-1=2$$

$$3\ sen\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=3$$

$$sen\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=1$$

Sabemos que $sen(t)=1$ si y solo si $t=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Luego

$$x-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+2k\pi \qquad k\in\mathbb{Z}$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+2k\pi \qquad k\in\mathbb{Z}$$

$$x=\pi+2k\pi \qquad k\in\mathbb{Z}$$

Los valores de $x\in\mathbb{R}$ para los cuales se verifica que $h(x)=2$ son los de la forma $x=\pi+2k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$.

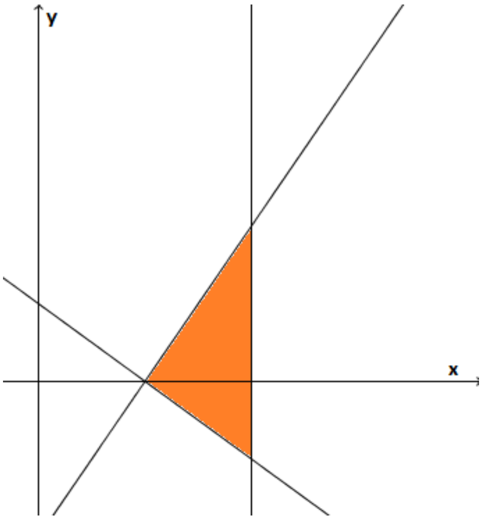
Ejercicio 4 (3 puntos)

El gráfico muestra el área encerrada entre las gráficas de las funciones

$$f(x) = 2x - 4, \qquad g(x) = 2 - x \qquad y\ la\ recta \quad x = 4$$

Calcular el valor del área sombreada.

Respuesta



Primero debemos hallar el punto en donde se cruzan las gráficas de las funciones

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 4 = 2 - x \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

Para hallar el valor de "y" de los puntos donde se cruzan evaluamos en cualquiera de las dos funciones.

$f(2) = 2(2) - 4 = 0$

El punto donde se cruzan las rectas es el $(2; 0)$

Luego, el área es

$$área = \int_2^4 (2x - 4) - (2 - x)\,dx = \int_2^4 2x - 4 - 2 + x\,dx = \int_2^4 3x - 6\,dx = \left(\frac{3x^2}{2} - 6x\right)\Big|_2^4$$

$$= \left(\frac{3(4)^2}{2} - 6 \cdot 4\right) - \left(\frac{3(2)^2}{2} - 6 \cdot 2\right) = 6$$

TEMA 3

Ejercicio 1 (2 puntos)

Dada la función $g(x) = 2^{4x} - a^2$ hallar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $g(-1) = -\frac{3}{16}$

Respuesta

Debemos hallar los valores para los cuales

$g(-1) = -\frac{3}{16}$

Tenemos que

$g(-1) = 2^{4\cdot(-1)} - a^2$

Entonces

$$2^{4\cdot(-1)} - a^2 = -\frac{3}{16} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{-4} + \frac{3}{16} = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{-4} + 3\cdot 2^{-4} = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 4\cdot 2^{-4}$$

$$a^2 = 2^2\cdot 2^{-4} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 2^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2} \quad o \quad a = -\frac{1}{2}$$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Dada la función $f(x) = ln\,(a\,x^2 + 2x + 3)$, determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ si $\boldsymbol{f}$ tiene un mínimo cuando $\boldsymbol{x} = -1$. Hallar en qué intervalo o unión de intervalos $\boldsymbol{f}$ es creciente

Respuesta

Si la función tiene un mínimo cuando $x = -1$ tenemos que

$$f'(-1) = 0$$

Calculamos la derivada de la función

$f'(x) = \dfrac{1}{a\,x^2 + 2x + 3}\cdot(2ax + 2)$

$f'(-1) = \dfrac{1}{a\,(-1)^2 + 2(-1) + 3}\cdot(2a(-1) + 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2a(-1) + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1$

Luego

$f(x) = ln\,(\,x^2 + 2x + 3)$

La derivada de la función no tiene más ceros, entonces para hallar el conjunto donde la función es creciente debemos analizar en que intervalo la derivada primera es positiva.

El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales ya que su argumento siempre es positivo (la cuadrática del argumento no tiene ceros).

Analizamos el signo de la derivada primera en los intervalos $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$

Recordamos la expresión de la derivada

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 3} \cdot (2x + 2)$$

En el intervalo $(-\infty; -1)$ la derivada primera es negativa ya que si evaluamos en $-2 \in (-\infty; -1)$ tenemos que $f'(-2) < 0$

En el intervalo $(-1; +\infty)$ la derivada primera es positiva ya que si evaluamos en $0 \in (-1; +\infty)$ tenemos que $f'(0) > 0$

Luego, la función es creciente en el intervalo , $(-1; +\infty)$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Dada la función $f(x) = -2sen\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$

hallar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales se verifica que $f(x) = 3$

Respuesta

Nos piden hallar los valores $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $f(x) = 3$, que es lo mismo que pedir

$$-2sen\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 3$$

$$-2sen\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 2$$

$$sen\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -1$$

Sabemos que $sen(t) = -1$ si y solo si $t = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Luego

$$2x + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \pi + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

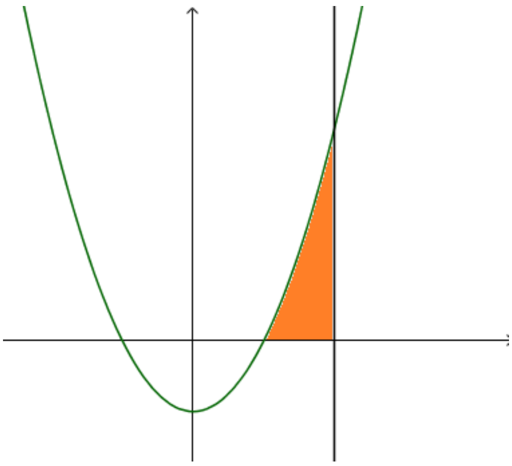
$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales se verifica que $f(x) = 3$ son los de la forma $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 4 (3 puntos)

Hallar el área de la región encerrada por la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 1$, la recta de ecuación $x = 2$ y el eje de las abscisas.

Respuesta



Primero debemos hallar el punto en donde la parábola cruza al eje x

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

Porque el área pedida está en el primer cuadrante donde los valores de x son mayores o iguales a cero.

Luego, el área es

$$área = \int_1^2 (x^2 - 1) - (0)\, dx = \int_1^2 (x^2 - 1)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Big|_1^2 = \left(\frac{(2)^3}{3} - 2\right) - \left(\frac{(1)^3}{3} - 1\right) = \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$