MATEMÁTICA

CLAVE DE CORRECCIÓN

PRIMER TURNO – TEMA 4

26/09/2018

Material elaborado por la Cátedra de Matemática - UBAXXI

Ejercicio 1 (2 puntos)

Hallar, de existir, las raíces de la función

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big)$$

siendo

$$f(x) = x^2 + 2x \quad ; \quad g(x) = 3x - 1$$

Resolución:

Hallamos $f \circ g(x)$ componiendo ambas funciones:

$$f\big(g(x)\big) = (3x-1)^2 + 2(3x-1) = 9x^2 - 6x + 1 + 6x - 2 = 9x^2 - 1$$

Luego buscamos las raíces:

$$9x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{9} \quad \Leftrightarrow \quad |x| = \frac{1}{3}$$

La respuesta entonces es:

$$x = \frac{1}{3} \quad \text{ó} \quad x = -\frac{1}{3}$$

Ejercicio 2 (3 puntos)

En un laboratorio se mide la temperatura de un gas sometido a variaciones de presión durante seis minutos. La fórmula de la función que permite calcular la temperatura (en ℃) conocido el tiempo transcurrido (en minutos) es

$$F(t) = t^3 - 6t^2 + 5t \qquad 0 \leq t \leq 6$$

Determinar para que valores de $\boldsymbol{t}$ la temperatura es menor a 0℃.

Resolución:

Debemos encontrar los valores de $t \in [0; 6]$ para los cuales se cumple que

$$F(t) = t^3 - 6t^2 + 5t < 0$$

Podemos por ejemplo buscar primero las raíces del polinomio, y aplicar el método de Bolzano para hallar los intervalos de negatividad de la función.

Notemos que

$$t^3 - 6t^2 + 5t = t \cdot (t^2 - 6t + 5)$$

Una de las raíces es entonces $t = 0$.

Las raíces de $t^2 - 6t + 5$ se obtienen a partir de la resolvente

$$t_{1;2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$

Obtenemos,

$$t_1 = 5 \qquad t_2 = 1$$

Aplicando, por ejemplo, el método de Bolzano, obtenemos los intervalos de positividad y negatividad dentro del intervalo $[0; 6]$:

t	0	(0;1)	1	$(1; 5)$	5	(5;6]
$F(t)$	0	+	0	-	0	+

Por lo tanto la temperatura será menor a cero grados en el intervalo $(1; 5)$

Material elaborado por la Cátedra de Matemática - UBAXXI

Ejercicio 3 (2 puntos)
Hallar las coordenadas $(x; y)$ del punto de intersección de las gráficas de las funciones $f(x) = 2x + 6$ y $g(x)$ siendo g una función lineal que cumple que $g(2) = 7$ y $g(3) = 12$

Resolución:

Primero hallamos los valores de los parámetros a y b de la función lineal $g(x) = ax + b$ planteando dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$g(2) = a \cdot 2 + b = 7$$

$$g(3) = a \cdot 3 + b = 12$$

Al resolverlas obtenemos que $g(x) = 5x - 3$.

Para hallar la intersección de las gráficas de ambas funciones planteamos hallar los valores de x tales que $f(x) = g(x)$, o sea:

$$2x + 6 = 5x - 3$$

Al despejar la incógnita $x$obtenemos:

$$x = 3$$

Para hallar la coordenada y basta con especializar en una de las dos funciones este valor $x = 3$. Elegimos, por ejemplo, $f(x)$ y obtenemos:

$$y = f(3) = 2 \cdot 3 + 6 = 12$$

Por lo tanto la respuesta es $(x; y) = (3; 12)$

Material elaborado por la Cátedra de Matemática - UBAXXI

Ejercicio 4 (3 puntos)

Dados los conjuntos

$$A = \{x \in R : \ |2x - 6| \leq 12\}$$

$$B = \left\{x \in R : \ \frac{3}{1 + |x|} < 1\right\}$$

Resolución:

Primero buscamos cuales son los valores de la recta real que pertenecen al conjunto A:

$$|2x - 6| \leq 12 \iff -12 \leq 2x - 6 \leq 12 \iff -6 \leq 2x \leq 18 \iff -3 \leq x \leq 9$$

O sea, $x \in [-3; 9]$

Ahora para el conjunto B:

$$\frac{3}{1 + |x|} < 1 \Leftrightarrow 3 < 1 + |x| \Leftrightarrow \quad |x| > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x > 2 \quad \text{ó} \quad x < -2$$

O sea, $x \in (2; +\infty)$ ó $x \in (-\infty; -2)$

que es lo mismo que $x \in (2; +\infty) \cup (-\infty; -2)$

Por lo tanto,

$$A \cap B = [-3; 9] \cap [(2; +\infty) \cup (-\infty; -2)]$$

$$A \cap B = [-3; -2) \cup (2; 9]$$

Gráficamente en la recta real:

```
-------------------------------------[---)-----------(----------------------]---------------------------------
                                    -3   -2          2                      9
```

Material elaborado por la Cátedra de Matemática - UBAXXI

Universidad de Buenos Aires

UBAXXI

MATEMÁTICA

CLAVE DE CORRECCIÓN

PRIMER TURNO – TEMA 1

26/09/2018

Material elaborado por la Cátedra de Matemática - UBAXXI

Ejercicio 1 (2 puntos)

Hallar las coordenadas $(x; y)$ del punto de intersección de las gráficas de las funciones $f(x) = 2x + 6$ y $g(x)$ siendo g una función lineal que cumple que $g(2) = 7$ y $g(3) = 12$

Resolución:

Primero hallamos los valores de los parámetros a y b de la función lineal $g(x) = ax + b$ planteando dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$g(2) = a \cdot 2 + b = 7$$

$$g(3) = a \cdot 3 + b = 12$$

Al resolverlas obtenemos que $g(x) = 5x - 3$.

Para hallar la intersección de las gráficas de ambas funciones planteamos hallar los valores de x tales que $f(x) = g(x)$, o sea:

$$2x + 6 = 5x - 3$$

Al despejar la incógnita $x$obtenemos:

$$x = 3$$

Para hallar la coordenada y basta con especializar en una de las dos funciones este valor $x = 3$. Elegimos por ejemplo $f(x)$ y obtenemos:

$$y = f(3) = 2 \cdot 3 + 6 = 12$$

Por lo tanto la respuesta es $(x; y) = (3; 12)$

Ejercicio 2 (3 puntos)
Dados los conjuntos

$$A = \{x \in R : \ |2x - 6| \leq 12\}$$

$$B = \left\{x \in R : \ \frac{3}{1 + |x|} < 1\right\}$$

Resolución:

Primero buscamos cuales son los valores de la recta real que pertenecen al conjunto A:

$$|2x - 6| \leq 12 \iff -12 \leq 2x - 6 \leq 12 \iff -6 \leq 2x \leq 18 \iff -3 \leq x \leq 9$$

O sea, $x \in [-3; 9]$

Ahora para el conjunto B:

$$\frac{3}{1 + |x|} < 1 \Leftrightarrow 3 < 1 + |x| \Leftrightarrow \quad |x| > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x > 2 \quad \text{ó} \quad x < -2$$

O sea, $x \in (2; +\infty)$ ó $x \in (-\infty; -2)$

que es lo mismo que $x \in (2; +\infty) \cup (-\infty; -2)$

Por lo tanto,

$$A \cap B = [-3; 9] \cap [(2; +\infty) \cup (-\infty; -2)]$$

$$A \cap B = [-3; -2) \cup (2; 9]$$

Gráficamente en la recta real:

-------------------------------------[---)-----------(----------------------]---------------------------------

-3 -2 2 9

Material elaborado por la Cátedra de Matemática - UBAXXI

Ejercicio 3 (2 puntos)
Hallar, de existir, las raíces de la función

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big)$$

siendo

$$f(x) = x^2 + 2x \quad ; \quad g(x) = 3x - 1$$

Resolución:

Hallamos $f \circ g(x)$ componiendo ambas funciones:

$$f\big(g(x)\big) = (3x-1)^2 + 2(3x-1) = 9x^2 - 6x + 1 + 6x - 2 = 9x^2 - 1$$

Luego buscamos las raíces:

$$9x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{9} \quad \Leftrightarrow \quad |x| = \frac{1}{3}$$

La respuesta entonces es:

$$x = \frac{1}{3} \quad \text{ó} \quad x = -\frac{1}{3}$$

Ejercicio 4 (3 puntos)
En un laboratorio se mide la temperatura de un gas sometido a variaciones de presión durante seis minutos. La fórmula de la función que permite calcular la temperatura (en ℃) conocido el tiempo transcurrido (en minutos) es

$$F(t) = t^3 - 6t^2 + 5t \qquad 0 \le t \le 6$$

Determinar para que valores de $\boldsymbol{t}$ la temperatura es menor a 0℃.

Resolución:

Debemos encontrar los valores de $t \in [0; 6]$ para los cuales se cumple que

$$F(t) = t^3 - 6t^2 + 5t < 0$$

Material elaborado por la Cátedra de Matemática - UBAXXI

Podemos por ejemplo buscar primero las raíces del polinomio, y aplicar el método de Bolzano para hallar los intervalos de negatividad de la función.

Notemos que

$$t^3 - 6t^2 + 5t = t \cdot (t^2 - 6t + 5)$$

Una de las raíces es entonces $t = 0$.

Las raíces de $t^2 - 6t + 5$ se obtienen a partir de la resolvente

$$t_{1;2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$

Obtenemos,

$$t_1 = 5 \qquad t_2 = 1$$

Aplicando, por ejemplo, el método de Bolzano, obtenemos los intervalos de positividad y negatividad dentro del intervalo $[0; 6]$:

t	0	(0;1)	1	$(1; 5)$	5	(5;6]
$F(t)$	0	+	0	-	0	+

Por lo tanto la temperatura será menor a cero grados en el intervalo $(1; 5)$

Material elaborado por la Cátedra de Matemática - UBAXXI

MATEMÁTICA

CLAVE DE CORRECCIÓN
PRIMER TURNO – TEMA 2
26/09/2018

Ejercicio 1 (2 puntos)
Hallar, de existir, las raíces de la función

$$h \circ f(x) = h\big(f(x)\big)$$

siendo

$$h(x) = 6 - 2x \quad ; \quad f(x) = x^2 - 7x + 3$$

Resolución:

Hallamos $h \circ f(x)$componiendo ambas funciones:

$$h\big(f(x)\big) = 6 - 2 \cdot (x^2 - 7x + 3) = 6 - 2x^2 + 14x - 6 = -2x^2 + 14x$$

Luego buscamos las raíces:

$$-2x^2 + 14x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x(-x + 7) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 0 \ \text{ ó } \ -x + 7 = 0$$

La respuesta entonces es:

$$x = 0 \quad \text{ó} \quad x = 7$$

Material elaborado por la Cátedra de Matemática - UBAXXI

Ejercicio 2 (3 puntos)

En un laboratorio se mide la temperatura de un gas sometido a variaciones de presión durante seis minutos. La fórmula de la función que permite calcular la temperatura (en ℃) conocido el tiempo transcurrido (en minutos) es

$G(t) = -t^3 + 3t^2 + 18t \quad 0 \leq t \leq 7$

Determinar para que valores de $\boldsymbol{t}$ la temperatura es mayor a 0℃

Resolución:

Debemos encontrar los valores de $t \in [0; 7]$ para los cuales se cumple que

$$G(t) = -t^3 + 3t^2 + 18t > 0$$

Podemos por ejemplo buscar primero las raíces del polinomio, y aplicar el método de Bolzano para hallar los intervalos de positividad de la función.

Notemos que

$$-t^3 + 3t^2 + 18t = t \cdot (-t^2 + 3t + 18)$$

Una de las raíces es entonces $t = 0$.

Las raíces de $-t^2 + 3t + 18$ se obtienen a partir de la resolvente

$$t_{1;2} = \frac{(-3) \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 18}}{2 \cdot (-1)}$$

Obtenemos, $t_1 = -3; t_2 = 6$

($t_1 = -3 \notin [0; 7]$, no se debe tener en cuenta)

Aplicando, por ejemplo, el método de Bolzano, obtenemos los intervalos de positividad y negatividad de $G(t)$ dentro del intervalo $[0; 7]$ pedido:

t	0	$(0; 6)$	6	$(6; 7)$
$G(t)$	0	+	0	-

Por lo tanto la temperatura será mayor a cero grados en el intervalo $(0; 6)$.

Material elaborado por la Cátedra de Matemática - UBAXXI

Ejercicio 3 (2 puntos)
Hallar las coordenadas $(x; y)$ del punto de intersección de las gráficas de las funciones $g(x) = -3x + 2$ y $h(x)$, siendo h una función lineal que cumple que $h(1) = -8$ y $h(4) = -2$

Resolución:

Primero hallamos los valores de los parámetros a y $b$de la función lineal $h(x) = ax + b$ planteando las ecuaciones:

$$h(1) = a \cdot 1 + b = -8$$
$$h(4) = a \cdot 4 + b = -2$$

Al resolverlas obtenemos que

$$h(x) = 2x - 10$$

Para hallar la intersección de las gráficas de ambas funciones planteamos hallar los valores de x tales que $g(x) = h(x)$, o sea:

$$-3x + 2 = 2x - 10$$

Al despejar la incógnita x obtenemos:

$$x = \frac{12}{5}$$

Para hallar la coordenada y basta con especializar en una de las dos funciones este valor $x = \frac{12}{5}$, elegimos por ejemplo $g(x)$ y obtenemos:

$$y = g\left(\frac{12}{5}\right) = (-3) \cdot \frac{12}{5} + 2 = -\frac{26}{5}$$

Por lo tanto la respuesta es $(x; y) = \left(\frac{12}{5}; -\frac{26}{5}\right)$

Material elaborado por la Cátedra de Matemática - UBAXXI

Ejercicio 4 (3 puntos)
Dados los conjuntos

$C = \{x \in R : |3x| < 6\}$

$D = \left\{x \in R : \dfrac{4}{2 + |x + 1|} \geq 1\right\}$

Hallar analíticamente y graficar en la recta real el conjunto $C \cap D$.

Resolución:

Primero buscamos cuales son los valores de la recta real que pertenecen al conjunto C:

$$|3x| < 6 \quad \Leftrightarrow \quad -6 < 3x < 6 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < x < 2$$

O sea, $x \in (-2; 2)$

Ahora para el conjunto D:

$$\frac{4}{2 + |x + 1|} \geq 1 \Leftrightarrow 4 \geq 2 + |x + 1| \Leftrightarrow 2 \geq |x + 1| \Leftrightarrow -2 \leq x + 1 \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$$

O sea, $x \in [-3; 1]$

Por lo tanto,

$$C \cap D = (-2; 2) \cap [-3; 1] (- 2; 1]$$
$$C \cap D = (- 2; 1]$$

Gráficamente en la recta real:

---------------**(**---|-----**]**------------
-2 0 1

Material elaborado por la Cátedra de Matemática - UBAXXI

MATEMÁTICA

CLAVE DE CORRECCIÓN

PRIMER TURNO – TEMA 3

26/09/2018

Ejercicio 1 (2 puntos)

Hallar las coordenadas $(x; y)$ del punto de intersección de las gráficas de las funciones $h(x) = 5x - 3$ y $f(x)$ siendo f una función lineal que cumple que $f(3) = 1$ y $f(-1) = 9$

Resolución:

Primero hallamos los valores de los parámetros a y b de la función lineal $f(x) = ax + b$ planteando dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$f(3) = a \cdot 3 + b = 1$$

$$f(-1) = a \cdot (-1) + b = 9$$

Al resolverlas obtenemos que $f(x) = -2x + 7$.

Para hallar la intersección de las gráficas de ambas funciones planteamos hallar los valores de x tales que $h(x) = f(x)$, o sea:

$$5x - 3 = -2x + 7$$

Al despejar la incógnita x obtenemos que $x = \frac{10}{7}$

Para hallar la coordenada y basta con especializar en una de las dos funciones este valor obtenido, elegimos por ejemplo $h(x)$ y obtenemos:

$$y = h(3) = 5 \cdot \frac{10}{7} - 3 = \frac{29}{7}$$

Por lo tanto la respuesta es $(x; y) = \left(\frac{10}{7}; \frac{29}{7}\right)$

Material elaborado por la Cátedra de Matemática - UBAXXI

Ejercicio 2 (3 puntos)
Dados los conjuntos

$$M = \{x \in R : \ |4x - 2| \leq 14\}$$

$$N = \left\{x \in R : \frac{5}{2 + |x|} < 1\right\}$$

Resolución:

Primero buscamos los valores de la recta real que pertenecen al conjunto M:

$$|4x - 2| \leq 14 \quad \Leftrightarrow \quad -14 \leq 4x - 2 \leq 14 \quad \Leftrightarrow \quad -12 \leq 4x \leq 16 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \leq x \leq 4$$

O sea, $x \in [-3; 4]$

Ahora para el conjunto N:

$$\frac{5}{2 + |x|} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 5 < 2 + |x| \quad \Leftrightarrow \quad 3 < |x| \quad \Leftrightarrow \quad x > 3 \ \text{ó} \ x < -3$$

O sea, $x \in (3; +\infty)$ ó $x \in (-\infty; -3)$

Es decir,

$$x \in (3; +\infty) \cup (-\infty; -3)$$

Por lo tanto,

$$M \cap N = [-3; 4] \cap [(3; +\infty) \cup (-\infty; -3)]$$

$$M \cap N = (3; 4]$$

Gráficamente en la recta real:

```
-----------------------(------]-------------------------------------
                       3      4
```

Material elaborado por la Cátedra de Matemática - UBAXXI

Ejercicio 3 (2 puntos)
Hallar, de existir, las raíces de la función

$$g \circ h(x) = g\big(h(x)\big)$$

siendo

$$g(x) = 5x^2 - 45 \quad ; \quad g(x) = 3 - x$$

Material elaborado por la Cátedra de Matemática - UBAXXI

Resolución:

Hallamos $g \circ h(x)$componiendo ambas funciones:

$$g\big(h(x)\big) = 5(3-x)^2 - 45 = 45 - 30x + 5x^2 - 45 = -30x + 5x^2$$

Luego buscamos las raíces

$$-30x + 5x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(-30 + 5x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ó} \quad -30 + 5x = 0$$

La respuesta entonces es:

$$x = 0 \quad \text{ó} \quad x = 6$$

Ejercicio 4 (3 puntos)
En un laboratorio se mide la temperatura de un gas sometido a variaciones de presión durante seis minutos. La fórmula de la función que permite calcular la temperatura (en ℃) conocido el tiempo transcurrido (en minutos) es

$$H(t) = -t^3 + 9t^2 - 8t \quad 0 \le t \le 7$$

Determinar para que valores de $\boldsymbol{t}$ la temperatura es menor a 0℃

Resolución:

Debemos encontrar los valores de $t \in [0; 7]$ para los cuales se verifica que

$$H(t) = -t^3 + 9t^2 - 8t < 0$$

Podemos por ejemplo buscar primero las raíces del polinomio, y aplicar el método de Bolzano para hallar los intervalos de negatividad de la función.

Notemos que

$-t^3 + 9t^2 - 8t < 0 = t \cdot (-t^2 + 9t - 8)$

Una de las raíces es entonces $t = 0$.

Las raíces de $-t^2 + 9t - 8$ se obtienen a partir de la resolvente

$$t_{1;2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-8)}}{2 \cdot (-1)}$$

Entonces, $t_1 = 1; t_2 = 8$

Aplicando, por ejemplo, el método de Bolzano, obtenemos los intervalos de positividad y negatividad dentro del intervalo $[0; 7]$

t	0	(0;1)	1	$(1; 5)$	8
$H(t)$	0	-	0	+	0

Por lo tanto la temperatura será menor a cero grados en el intervalo $(0; 1)$

Material elaborado por la Cátedra de Matemática - UBAXXI