APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Puntaje de cada ejercicio	2,5	0,50	0,50	2	0,50	0,50	0,50	0,50	2,50

Duración del examen: 2 hrs. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz. En los ejercicios de respuesta múltiple, elija la respuesta correcta de cada pregunta y márquela con una X.

1. Hallar la recta de pendiente 2 que corta a la recta $y = 5x$ en el punto de abscisa $x = \frac{1}{2}$.

Para la realización de este ejercicio, recomendamos ver apuntes de: Ecuaciones y Función lineal.

Para hallar la ecuación de una recta, debemos obtener su pendiente y ordenada al origen. La ecuación de una recta es de la forma: $y = m.x + b$. *Sabemos que su pendiente es 2, por lo que la recta pedida hasta el momento, podríamos expresarla como:* $y = 2.x + b$.

Que las rectas se corten en el punto de abscisas $x = \frac{1}{2}$*, quiere decir que para ese valor de "x", ambas ecuaciones deberían poseer el mismo valor de "y". Por lo que se cumpliría que* $2.x + b = 5x$ *cuando* $x = \frac{1}{2}$.

Reemplazando, obtenemos que:

$$2\,.\frac{1}{2} + b = 5\,.\frac{1}{2}$$

Despejamos para hallar el valor de "b":

$$1 + b = \frac{5}{2}$$

Restando miembro a miembro:

$$1 + b - 1 = \frac{5}{2} - 1$$

$$b = \frac{3}{2}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta pedida es:

$$\boldsymbol{y = 2.x + \frac{3}{2}}$$

2. Indicar cuál de las siguientes opciones corresponde a los conjuntos de positividad y negatividad de la siguiente función: $y = x^4 - 3x^2 - 4$

a) $C^+ = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, $C^- = (-2,2)$ **Correcta**

b) $C^+ = \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$, $C^- = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

c) $C^+ = (-\infty, +\infty)$, $C^- = \emptyset$

d) $C^+ = \emptyset$, $C^- = (-\infty, +\infty)$

Para la realización de este ejercicio, recomendamos ver apuntes de: Funciones (introducción), Función polinómica y Polinomios.

Para poder determinar los conjuntos de positividad y negatividad, primero debemos encontrar cuales son las raíces de la función.

Como la misma es una función polinómica, de grado 4, a lo sumo podremos encontrar 4 raíces reales (por el teorema fundamental del álgebra). Para ello utilizamos el teorema de Gauss, para determinar las raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros.

Determinación de raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros

Dado un polinomio $P(x) = a_n x_n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, en el que $a_0; a_1; a_2; \ldots; a_n$ son coeficientes enteros, para determinar sus raíces racionales se ensayan soluciones de la forma $r = \frac{p}{q}$ donde p es un divisor de a_0 y q es un divisor de a_n.

Los divisores de $a_0 = -4$ *son:* $\{-1, 1, -2, 2, -4, 4\}$

Los divisores de $a_4 = 1$ *son:* $\{-1, 1\}$

Las soluciones posibles son: $\{-1, 1, -2, 2, -4, 4\}$

Procedemos entonces, mediante el teorema del resto hallar para que valores se anula el polinomio.

Teorema del resto

El valor que toma un polinomio P(x) para x = a, es decir P(a), coincide con el resto de la división de P(x) por x – a.

$$P(2) = 2^4 - 3\,.\,2^2 - 4$$

$P(2) = 0$ *, por lo tanto, x=2 es una raíz de la función.*

Por consiguiente, vemos que $x - 2$ *divide a* $y = x^4 - 3x^2 - 4$*. Por lo que, es posible utilizar la regla de Ruffini para re-expresar al polinomio:*

Regla de Ruffini

En los casos en que el polinomio divisor sea de la forma x – a ó x + a, como en el ejemplo anterior, se puede emplear la ***regla de Ruffini,*** que permite obtener el resto y los coeficientes del polinomio cociente sin efectuar la división en la forma en que lo hicimos antes.

	1	*0*	*-3*	*0*	*4*
2		*2*	*4*	*2*	*4*
	1	*2*	*1*	*2*	*0*

$$x^4 - 3x^2 - 4 = (x^3 + 2x^2 + x + 2)(x - 2)$$

Luego podemos repetir los mismos pasos para el polinomio: $x^3 + 2x^2 + x + 2$

Los divisores de $a_0 = 2$ *son:* $\{-1, 1, -2, 2\}$

Los divisores de $a_4 = 1$ *son:* $\{-1, 1\}$

Las soluciones posibles son: $\{-1, 1, -2, 2\}$

Mediante el teorema del resto, si $x = -2$*:*

$$P(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 + (-2) + 2$$

$$P(-2) = -8 + 2\,.\,4 - 2 + 2$$

$$P(-2) = 0$$

Utilizando nuevamente la regla de Ruffini:

	1	*2*	*1*	*2*
-2		*-2*	*0*	*-2*
	1	*0*	*1*	*0*

Entonces: $x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2 + 1)(x - 2)(x + 2)$

Como $x^2 + 1$ *no puede seguir factorizandose (puesto que no hay ningun numero real tal que* $x^2 + 1 = 0$*), las únicas raices reales son* $x = 2$ *y* $x = -2$*.*

Finalmente si evaluamos la función antes y después de cada raíz, podremos determinar su conjunto de positividad y su conjunto de negatividad.

Por ejemplo, para los valores:

$x = -3 \;\to\; P(-3) = ((-3)^2 + 1)\,.\,(-3 - 2)\,.\,(-3 + 2)$

$P(-3) = 50$

$x = 0 \;\to\; P(0) = ((0)^2 + 1)\,.\,(0 - 2)\,.\,(0 + 2)$

$P(0) = -4$

$x = 3 \;\to\; P(3) = ((3)^2 + 1)\,.\,(3 - 2)\,.\,(3 + 2)$

$P(3) = 50$

A partir de esto podemos indicar cuales son los intervalos de positividad y negatividad:

$(-\infty; -2)$	$(-2; 2)$	$(2; +\infty)$
$+$	$-$	$+$

Entonces:

$$C^+: (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$$

$$C^-: (-2; 2)$$

3. El dominio de la función inversa de la función $f(x) = (x - 2)^2$, es:

a) $\mathbb{R}_{\geq -2}$

b) $\mathbb{R}_{\geq 0}$ **Correcta**

c) $\mathbb{R}$

d) $\mathbb{R}_{\leq 0}$

Para la realización de este ejercicio, recomendamos ver apunte de: Función Inversa.

Para realizar este ejercicio, debemos recordar lo siguiente:

Dada la función f: A → B, si cada elemento de la imagen de f, proviene de un único elemento de su dominio, diremos que la función f es ***inyectiva***.

O equivalentemente,

Cuando para cada *b* que pertenece a Im(f), la ecuación f(x) = b tiene solución única, diremos que la función es inyectiva.

Dada la función f: A → B, diremos que f es ***suryectiva*** (o sobreyectiva) si y solo si se verifica que B = Im(f)

Diremos que f es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.

Dada una función biyectiva, f: A → B se llama ***función inversa*** de *f* y se indica f^{-1} a la función

$$f^{-1}: B \to A$$

definida por

$$f^{-1}(y) = x \text{ si y solo si } f(x) = y$$

$f(x)$ es una función cuadrática expresada en su forma canónica. Su dominio es $\mathbb{R}$, mientras que su imagen es $[0; +\infty)$. Sabemos que para que una función admita inversa, la misma debe ser biyectiva. Esto quiere decir que debe ser inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Para que sea inyectiva, debemos restringir el dominio, es decir que se necesita solo una de las ramas de la parábola. Como su eje de simetría se encuentra en x=2, el dominio de f(x) deberá ser: $[2; +\infty)$.

Por otro lado, para que sea sobreyectiva, la imagen de la función debe coincidir con el conjunto de llegada. Por lo tanto, su codominio deberá ser: $[0; +\infty)$.

Por consiguiente, para que f(x) admita inversa, la función debe estar definida como:

$$f: [2; +\infty) \to [0; +\infty) \ / \ f(x) = (x-2)^2$$

La inversa de f tendrá como dominio la imagen de f(x) y su imagen será el dominio de f. Por lo tanto, f^{-1} estará definida como:

$$\boldsymbol{f^{-1}: [0; +\infty) \to [2; +\infty)}$$

Finalmente, el dominio de la función inversa de f(x) es: $[\mathbf{0}; +\infty)$

---

4. Hallar el conjunto de los $x \in \mathbb{R}$, tal que $f(x).g(x) < 0$. Siendo, $f(x) = x - 3$ y $g(x) = x^2 - 1$

Para la realización de este ejercicio, recomendamos ver apuntes de: Funciones (Introducción), Función polinómica y Polinomios.

$f(x)$ y $g(x)$ son polinomios y la multiplicación de polinomios da por resultado otra función polinómica. Por lo tanto, si $f(x).g(x) < 0$ la resolución del ejercicio se reduce a encontrar el conjunto de negatividad de la función.

En primer lugar, es necesario hallar las raíces de la función. Para ello, conviene expresar al polinomio en su forma factorizada. Como f(x) ya está factorizada, solo bastará con factorizar a g(x):

$g(x) = x^2 - 1$

$g(x) = (x-1).(x+1)$ *(por ser una diferencia de cuadrados)*

Por lo tanto, $f(x).g(x) = (x-3).(x+1).(x-1)$, lo que quiere decir que sus raíces son:

$x_1 = -1$

$x_2 = 1$

$x_3 = 3$

Luego, evaluamos $f(x).g(x)$ antes y después de cada raíz para determinar los conjuntos de positividad y negatividad:

$x = -2 \rightarrow f(-2).g(-2) = (-2-3).(-2+1).(-2-1)$
$f(-2).g(-2) = -15$

$x = 0 \rightarrow f(0).g(0) = (0-3).(0+1).(0-1)$
$f(0).g(0) = 3$

$x = 2 \rightarrow f(2).g(2) = (2-3).(2+1).(2-1)$
$f(2).g(2) = -3$

$x = 4 \rightarrow f(4).g(4) = (4-3).(4+1).(4-1)$
$f(4).g(4) = 15$

A partir de esto podemos indicar cuales son los intervalos de positividad y negatividad:

$(-\infty;-1)$	$(-1;1)$	$(1;3)$	$(3;+\infty)$
$-$	$+$	$-$	$+$

Finalmente, $f(x).g(x) < 0$ para los $x \in (-\infty;-1) \cup (1;3)$.

5. Indicar cuál de las siguientes opciones expresa la distancia entre los puntos $(4;2)$ y $(1;5)$.

a) 18
b) $3\sqrt{2}$ Correcta
c) $\sqrt{74}$
d) $\sqrt{2}$

Para la realización de este ejercicio, recomendamos ver apuntes de: Distancia entre puntos.

Para calcular la distancia entre dos puntos, podemos utilizar la siguiente fórmula:

$$d(A;B) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

Reemplazando por los puntos $(4;2)$ y $(1;5)$ nos queda:

$d = \sqrt{(4-1)^2+(2-5)^2}$

$d = \sqrt{3^2+(-3)^2}$

$d = \sqrt{9+9}$

$d = \sqrt{18}$

$d = 3.\sqrt{2}$ (Por factorización)

---

6. Hallar la forma polinómica de la siguiente función cuadrática si el coeficiente principal es -2 y tiene raíces en $x = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{1}{4}$

a) $f(x) = -2x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ **Correcta**

b) $f(x) = x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$

c) $f(x) = -2x^2 - x + \frac{1}{4}$

d) $f(x) = -2x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

Para la realización de este ejercicio, recomendamos ver apunte de: Funciones cuadráticas.

Recordemos que, si conocemos el coeficiente principal y las raíces de una función cuadrática, entonces podemos expresarla en su forma factorizada:

$$f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2)$$

Entonces,

$$f(x) = -2.\left(x + \frac{1}{2}\right).\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

Si desarrollamos la expresión, obtendremos la función cuadrática en su forma polinómica:

$f(x) = -2.\left(x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\right)$ *(por propiedad distributiva)*

$f(x) = -2.\left(x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\right)$

Finalmente aplicando propiedad distributiva nos queda: $\boldsymbol{f(x) = -2x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}}$

---

7. Sea $f(x) = -2x^2 + c$ con $c \in \mathbb{R}$, y $g(x) = 7x$, indicar entre las siguientes opciones el conjunto dado por los valores de c en los cuales las gráficas de $f(x)$ y de $g(x)$ se corten en dos puntos.

a) $S = \left(-\infty\,;\,-\frac{49}{8}\right) \cup \left(-\frac{49}{8}\,;\,+\infty\right)$

b) $S = \emptyset$

c) $S = \left(-\infty\,;\,-\frac{5}{2}\right)$

d) $S = \left(-\frac{49}{8}\,;\,+\infty\right)$ **Correcta**

Para la realización de este ejercicio, recomendamos ver apuntes de: Ecuaciones e inecuaciones, Funciones (Introducción) y Funciones cuadráticas.

Para saber cuáles son los puntos en los que se cortan dos funciones, debemos igualarlas:

$$f(x) = g(x)$$

$$-2x^2 + c = 7x$$

Si restamos 7x a ambos miembros, nos queda que:

$$-2x^2 - 7x + c = 0$$

La cual es una función cuadrática que, al estar igualada a cero, podremos encontrar sus raíces al utilizar la fórmula resolvente (o Bhaskara). Encontrar dichas raíces equivale a hallar los puntos de intersección de $f(x)$ *y* $g(x)$*.*

Además, sabemos que se cortarán en dos puntos cuando el discriminante de la misma sea mayor que cero, es decir:

$$b^2 - 4ac > 0 \qquad \Rightarrow \qquad (-7)^2 - 4.(-2).c > 0$$

$$49 + 8c > 0$$

$$8c > -49$$

$$c > -\frac{49}{8}$$

Por lo tanto, el conjunto dado por los valores de c en los cuales las gráficas de $f(x)$ *y* $g(x)$ *se corten en dos puntos, es:* $\left(-\frac{49}{8}; +\infty\right)$.

---

8. Si $x = 2$ es una de las raíces del polinomio $P(x) = x^3 - x^2 + ax$, el valor de $a \in \mathbb{R}$ es:

a) $a = -\frac{1}{2}$

b) $a = -2$ **Correcta**

c) $a = 2$

d) $a = \frac{1}{2}$

Para la realización de este ejercicio, recomendamos ver apuntes de: Funciones polinómicas y Polinomios.

Por el teorema del resto, sabemos que $P(a) = R$ *(siendo R el resto de la división entre* $P(x)$ *y* $(x - a)$*)*

Como $x = 2$ *es raíz de* $P(x)$*, el resto de dividir a* $P(x)$ *por* $(x - 2)$*, es cero. Entonces,* $P(2) = 0$*.*

Reemplazando en el polinomio:

$P(2) = 2^3 - 2^2 + a.2$

$0 = 2^3 - 2^2 + a.2$

$0 = 8 - 4 + 2a$

$0 = 4 + 2a$

$-4:2 = a$

$\boldsymbol{-2 = a}$

---

9. Hallar el valor de $k \in \mathbb{R}$, tal que el $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ exista, siendo $f(x) = \begin{cases} 3x - k - 4 & si\ x > 4 \\ 0 & si\ x = 4 \\ 5x + k & si\ x < 4 \end{cases}$

Para la realización de este ejercicio, recomendamos ver apuntes de: Ecuaciones - Límite y asíntotas.

Antes de comenzar el ejercicio, recordemos:

> Decimos que una función f tiene límite finito L cuando x tiende a ***a*** si y sólo sí los líimites por izquierda y por derecha en ***a*** coinciden. O sea:
>
> $$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = L$$

Entonces, para que el límite de $f(x)$ exista: $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$

Procedemos a calcular el límite por derecha y por izquierda de la función:

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} 3x - k - 4 = 3 \,.\, 4 - k - 4 = 8 - k$$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = 8 - k$$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} 5x + k = 5 \,.\, 4 + k = 20 + k$$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = 20 + k$$

Es decir que:

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^-} f(x)$$

$$8 - k = 20 + k$$

Restando a ambos miembros 20:

$$8 - k - 20 = k$$

$$-12 - k = k$$

Sumando a ambos miembros k:

$$-12 = 2k$$

Dividiendo a ambos miembros por 2:

$$-12 : 2 = k$$

$$\boldsymbol{-6 = k}$$