27/09/2023

TEMA 9

APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 40'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Dados los puntos $\boldsymbol{P=(a;3)}$ y $\boldsymbol{Q=(2;-1)}$, hallar todos los valores de $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}$ para los cuales la distancia entre $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$ sea igual a $\boldsymbol{5}$.

Planteamos la distancia entre los puntos *A* y *B* y resolvemos la ecuación que se obtiene:

$$d(A;B)=\sqrt{(2-a)^2+(-1-3)^2}$$
$$5=\sqrt{(2-a)^2+(-4)^2}$$
$$5=\sqrt{(2)^2-2\cdot 2.a+a^2+16}$$
$$5=\sqrt{4-4a+a^2+16}$$
$$5=\sqrt{a^2-4a+20}$$
$$(5)^2=a^2-4a+20$$
$$25=a^2-4a+20$$
$$0=a^2-4a-5$$

Resolvemos la ecuación cuadrática:

$$a_1,a_2=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4.1.(-5)}}{2.1}=\frac{4\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{4\pm 6}{2}$$
$$a_1=5 \quad y \quad a_2=-1$$

Por lo tanto, los valores pedidos son 5 y −1.

Para la resolución de este ejercicio aplicamos el concepto de Distancia entre dos puntos y su fórmula, desarrollado en el apunte "Distancia entre puntos" de la Sesión 2: Números Reales y resolución de ecuación cuadrática desarrollado en el apunte "Ecuaciones e Inecuaciones" correspondiente a la misma sesión.

2. Dada la función $\boldsymbol{h(x) = 2\sqrt{3x^2 - 3} - 1}$, hallar el dominio y la imagen.

<u>Dominio de $\boldsymbol{f(x)}$:</u>

Para determinar el dominio de una función es necesario analizar en su fórmula qué operaciones figuran y si alguna de ellas tiene alguna restricción. En el caso de esta función, las operaciones de suma, resta, multiplicación y potenciación no tienen restricciones ya que son válidas para cualquier número real; pero la raíz cuadrada sí presenta una condición a cumplir, y es que el radicando (la expresión que se encuentra dentro de la raíz) no puede ser negativo. Es decir que la condición que debe cumplirse es:

$$3x^2 - 3 \geq 0$$

Resolver esa inecuación nos dará el conjunto correspondiente al dominio de la función.

$$3x^2 - 3 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 \geq 3 \quad \Longrightarrow \quad x^2 \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad |x| \geq 1$$

Aplicando las propiedades de valor absoluto:

$$|x| \geq 1$$

$$x \geq 1 \quad o \quad x \leq -1$$

Por lo tanto: $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \quad \Longrightarrow \quad Dom\, f(x) = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

<u>Conjunto Imagen de $\boldsymbol{f(x)}$:</u>

El conjunto imagen de una función es el conjunto de valores que puede tomar la función. Para su determinación debemos analizar qué resultados puedo obtener en las distintas operaciones que aparecen en su fórmula.

En el caso de f(x), la expresión $\boldsymbol{\sqrt{3x^2 - 3}}$ será un valor mayor o igual a 0 (no puede ser negativo); si multiplicamos por 2 cualquier resultado, también obtendremos un número mayor o igual a 0. Si luego se resta 1 a ese resultado, los valores posibles de la función serán mayores o iguales a -1.

Es decir: $\boldsymbol{Im\, f(x) = [-1; +\infty)}$

Para la resolución de este ejercicio debemos tener en cuenta los conceptos de Dominio y Conjunto Imagen desarrollados en el apunte “Funciones (Introducción)” de la Sesión 3: Funciones. Función Lineal.

3. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1\,;3)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $y=\frac{4}{7}x+\frac{11}{7}$

La recta que debemos hallar tiene por ecuación a la expresión $y=mx+b$, donde m es la pendiente y b la ordenada al origen.

La recta buscada es perpendicular a la recta $y=\frac{4}{7}x+\frac{11}{7}$, para obtener su pendiente tenemos en cuenta que el producto entre sus pendientes es igual a – 1.

Entonces como la pendiente de la recta dada es $\frac{4}{7}$, se debe cumplir que:

$$m.\frac{4}{7}=-1$$

Despejando $m=-\frac{7}{4}$.

Con lo cual la ecuación nos queda: $y=-\frac{7}{4}x+b$.

Para hallar la ordenada al origen reemplazamos las coordenadas del punto dado $(1\,;3)$ en la ecuación $y=-\frac{7}{4}x+b$.

Entonces $3=-\frac{7}{4}.1+b$ con lo cual $b=3+\frac{7}{4}=\frac{19}{4}$

Finalmente la ecuación buscada es $y=-\frac{7}{4}x+\frac{19}{4}$.

Para la resolución de este ejercicio trabajamos con los conceptos de Función Lineal, pendiente y ordenada a origen desarrollados en el apunte “Función Lineal” de la Sesión 3: Funciones. Función Lineal.

4. Hallar la fórmula de la función cuadrática que satisface:

- **La gráfica pasa por los puntos** $\boldsymbol{A = (2;0)}$ **y** $\boldsymbol{B = (0;6)}$
- **La abscisa del vértice está en** $\boldsymbol{x_v = -1}$**.**

Hay varias maneras de encarar este ejercicio.

Por ejemplo: Como conocemos la $x_v = -1$ podemos utilizar la expresión canónica:

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v, a \neq 0$$

Reemplazando en ella obtenemos: $f(x) = a(x+1)^2 + y_v$.

Debemos hallar el valor de a y de y_v.

Como los puntos dados $A = (2;0)$ y $B = (0;6)$ pertenecen a la gráfica de la función cuadrática entonces podemos reemplazarlos en la ecuación:

$$f(x) = a(x+1)^2 + y_v$$

Luego

$$0 = a(2+1)^2 + y_v$$

y

$$6 = a(0+1)^2 + y_v$$

Deben cumplirse simultáneamente ambas ecuaciones:

$0 = 9a + y_v$

$6 = a + y_v$

Por lo tanto: $-9a = y_v$

Reemplazando en la segunda ecuación: $6 = a + (-9a)$

$-6 = 8a$ con lo cual $a = -\frac{3}{4}$.

Con el valor hallado de a reemplazamos en la ecuación anterior y despejamos el valor de y_v.

$y_v = -9(-\frac{3}{4}) \Rightarrow y_v = \frac{27}{4}$

Con los valores hallados la expresión es:

$$f(x) = -\frac{3}{4}(x+1)^2 + \frac{27}{4}$$

Para la resolución de este ejercicio trabajamos con los conceptos de Función Cuadrática, Expresión Canónica, desarrollados en el apunte "Función Cuadrática" de la Sesión 4: Función Cuadrática y Polinómica.