TEMA 1

Ejercicio 1 (2 puntos)

Hallar la expresión de un polinomio de grado 5 que verifica las siguientes condiciones:

a) Tiene una raíz simple en $x = -3$
b) Tiene una raíz doble en $x = 1$
c) Tiene una raíz doble en $x = B$, siendo B la abscisa del vértice de la parábola con ecuación $y = 2x^2 - 8x + 7$

Respuesta

Sabemos que el polinomio es de grado 5 y conocemos sus raíces. Entonces, la forma factorizada de un polinomio que cumpla las condiciones dadas es

$$P(x) = k \cdot \big(x - (-3)\big) \cdot (x-1)^2 \cdot (x-B)^2 = k \cdot (x+3) \cdot (x-1)^2 \cdot (x-B)^2$$

La abscisa del vértice de la parábola $y = 2x^2 - 8x + 7$ es:

$$abcisa\ del\ vértice = x_v = \frac{-(-8)}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad B = 2$$

Entonces, si fijo $k = 1$ (se pide un polinomio, con lo cual podemos darle el valor que queramos), tenemos que

$$P(x) = 1 \cdot (x+3) \cdot (x-1)^2 \cdot (x-2)^2$$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Hallar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $f(x) = g(x)$ siendo

$$f(x) = 5^{x^2-3} \qquad g(x) = 25^x$$

Respuesta

Buscamos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $f(x) = g(x)$

Entonces planteamos

$$5^{x^2-3} = 25^x$$
$$5^{x^2-3} = (5^2)^x$$
$$5^{x^2-3} = 5^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3 = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = -1 \quad x_2 = 3$$

Luego, el conjunto pedido es $\{-1, 3\}$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Hallar el conjunto de ceros, de crecimiento y decrecimiento de la función
$$f(x) = \ln((4 - 2x)^2 + 1)$$

Respuesta

Conjunto de ceros:

Sabemos que $\ln(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1$.

Luego
$$\ln((4 - 2x)^2 + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (4 - 2x)^2 + 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (4 - 2x)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$
$$C^0 = \{2\}$$

Conjunto de crecimiento y decrecimiento:
$$f'(x) = \frac{1}{(4 - 2x)^2 + 1} \cdot 2(4 - 2x) \cdot (-2) = \frac{-4(4 - 2x)}{(4 - 2x)^2 + 1}$$
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

Analizamos el signo de la derivada primera de la función en los intervalos determinados por los ceros de dicha función:
$$(-\infty; 2) \;\; y \;\; (2; +\infty)$$

- En el intervalo $(-\infty; 2)$ la función es decreciente ya que si evaluamos en $0 \in (-\infty; 2)$:

$$f'(0) = \frac{-4(4-2\cdot 0)}{(4-2\cdot 0)^2+1} = -\frac{8}{17} < 0$$

- En el intervalo $(2; +\infty)$ la función es creciente ya que si evaluamos en $4 \in (2; +\infty)$:

$$f'(0) = \frac{-4(4-2\cdot 4)}{(4-2\cdot 4)^2+1} = \frac{16}{17} > 0$$

Entonces,

Intervalo de crecimiento: $(2; +\infty)$

Intervalo de decrecimiento: $(-\infty; 2)$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Hallar el valor de la constante $a \in \mathbb{R}$ para que

$$\int_0^\pi a\, sen(x) - 3\, f(x)\ dx = 10$$

sabiendo que

$$\int_0^\pi f(x)\, dx = a$$

Respuesta

$$\int_0^\pi a\, sen(x) - 3\, f(x)\ dx = a\int_0^\pi sen(x)\ dx - 3\int_a^\pi f(x)\, dx = a[(-\cos(x))|_0^\pi] - 3\cdot a$$

$$= a[-\cos(\pi) - (-\cos(0))] - 3a = a[-(-1)+1] - 3a = -a$$

Por otro lado

$$\int_0^{\pi} a\, sen(x) - 3\, f(x)\ dx = 10$$

Entonces,

$$-a = 10 \quad \Leftrightarrow \quad a = -10$$

TEMA 2

Ejercicio 1 (2 puntos)

Hallar la expresión de un polinomio de grado 5 que verifica las siguientes condiciones:

a) Tiene una raíz doble en $x = 3$

b) Tiene una raíz simple en $x = -1$

c) Tiene una raíz doble en $x = A$ siendo A la abscisa del vértice de la parábola con ecuación $y = 3x^2 - 12x + 2$

Respuesta

Sabemos que el polinomio es de grado 5 y conocemos sus raíces. Entonces, la forma factorizada de un polinomio que cumpla las condiciones dadas es

$$P(x) = k \cdot (x-3)^2 \cdot \big(x-(-1)\big) \cdot (x-A)^2 = k \cdot (x-3)^2 \cdot (x+1) \cdot (x-A)^2$$

La abscisa del vértice de la parábola $y = 3x^2 - 12x + 2$ es:

$$abcisa\ del\ vértice = x_v = \frac{-(-12)}{2 \cdot 3} = \frac{12}{6} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad A = 2$$

Entonces, si fijo $k = 1$ (se pide un polinomio, con lo cual podemos darle el valor que queramos), tenemos que

$$P(x) = 1 \cdot (x-3)^2 \cdot (x+1) \cdot (x-2)^2$$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Hallar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $h(x) = g(x)$ siendo

$$h(x) = 3^{x^2+3} \qquad g(x) = 9^{2x}$$

Respuesta

Buscamos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $h(x) = g(x)$

Entonces planteamos

$$3^{x^2+3} = 9^{2x}$$
$$3^{x^2+3} = (9^2)^{2x}$$
$$3^{x^2+3} = 3^{4x} \quad \Leftrightarrow \quad x^2+3 = 4x \quad \Leftrightarrow \quad x^2-4x+3=0$$
$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1} = \frac{4\pm\sqrt{4}}{2} = \frac{4\pm 2}{2}$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = 3 \quad x_2 = 1$$

Luego, el conjunto pedido es $\{1,3\}$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Hallar el conjunto de ceros, de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = \ln(1+(2-3x)^2)$$

Respuesta

<u>Conjunto de ceros:</u>

Sabemos que $\ln(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1.$

Luego

$$\ln(1+(2-3x)^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1+(2-3x)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (2-3x)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{3}$$

$$C^0 = \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

<u>Conjunto de crecimiento y decrecimiento:</u>

$$f'(x) = \frac{1}{(2-3x)^2+1}\cdot 2(2-3x)\cdot(-3) = \frac{-6(2-3x)}{(2-3x)^2+1}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{3}$$

Analizamos el signo de la derivada primera de la función en los intervalos determinados por los ceros de dicha función:

$$\left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \ y \ (\frac{2}{3}; +\infty)$$

- En el intervalo $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$ la función es decreciente ya que si evaluamos en $0 \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$:

$$f'(0) = \frac{-6 \cdot (2 - 3 \cdot 0)}{(2 - 3 \cdot 0)^2 + 1} = -\frac{12}{5} < 0$$

- En el intervalo $(2; +\infty)$ la función es creciente ya que si evaluamos en $4 \in (2; +\infty)$:

$$f'(0) = \frac{-6 \cdot (2 - 3 \cdot 4)}{(2 - 3 \cdot 4)^2 + 1} = \frac{60}{101} > 0$$

Entonces,

Intervalo de crecimiento: $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$

Intervalo de decrecimiento: $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Hallar el valor de la constante $b \in \mathbb{R}$ para que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\ cos(x) + 5\ g(x)\ dx = 11$$

sabiendo que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\, dx = 2b$$

Respuesta

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\, cos(x) + 5\, g(x)\ dx = b\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x)\ dx + 5\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\, dx = b\left[sen(x)|_0^{\frac{\pi}{2}}\right] + 5\cdot(2b)$$

$$= b\left[sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen(0)\right] + 10b = 11b$$

Por otro lado

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\, cos(x) + 5\, g(x)\ dx = 11$$

Entonces,

$$11b = 11 \quad \Leftrightarrow \quad b = 1$$