1. Hallar el dominio y el conjunto de ceros de la función $f(x) = x - \sqrt{18 - 2x^2}$.

Solución

La función está bien definida siempre y cuando el argumento de la raíz cuadrada sea un número mayor o igual a cero. Entonces debemos pedir que:

$$0 \leq 18 - 2x^2 \iff 2x^2 \leq 18 \iff x^2 \leq 9 \iff |x| \leq 3 \iff x \in [-3; 3]$$

Luego

$$Dom(f) = [-3; 3]$$

Ahora vamos a hallar el conjunto de ceros de la función

$$f(x) = 0 \iff x - \sqrt{18 - 2x^2} = 0 \iff \sqrt{18 - 2x^2} = x$$

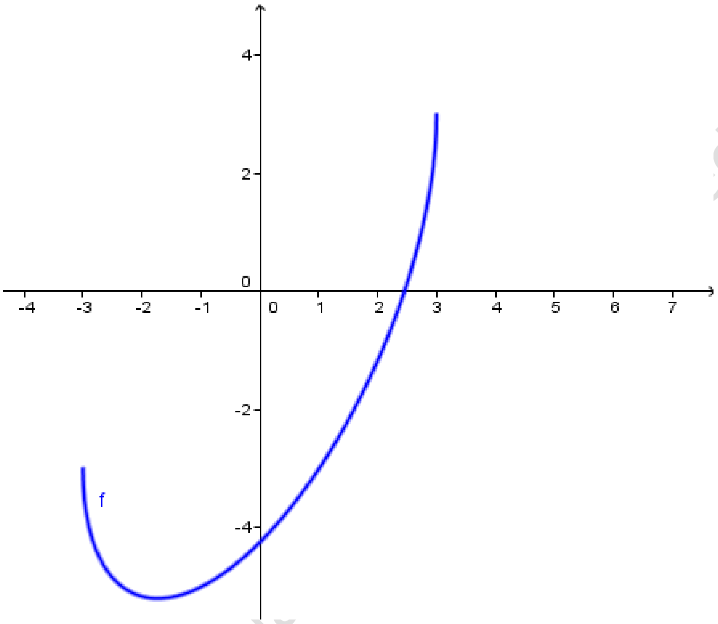
La última ecuación nos dice que el o los valores de x que buscamos deben ser números mayores o iguales a cero.

Entonces

$$\sqrt{18 - 2x^2} = x \iff \left(\sqrt{18 - 2x^2}\right)^2 = x^2 \iff 18 - 3x^2 = 0 \iff x^2 = 6 \implies x = \sqrt{6}$$

Luego,

$$C^0(f) = \{\sqrt{6}\}$$



2. Hallar la distancia entre el vértice de la parábola $y = 2(x-3)^2 - 5$ y el vértice de la parábola $y = ax^2 - x + 2$ que se sabe pasa por el punto $P = (1; -2)$.

Solución

El vértice de la parábola $y = 2(x-3)^2 - 5$ es $V_1 = (3; -5)$

La parábola $y = ax^2 - x + 2$ pasa por el punto $P = (1; -2)$, entonces

$$-2 = a(1)^2 - 1 + 2 \iff -2 = a + 1 \iff a = -3$$

y por lo tanto

$$y = -3x^2 - x + 2$$

La abscisa del vértice de esta parábola es

$$x_v = \frac{-(-1)}{2(-3)} = -\frac{1}{6}$$

Entonces

$$y_v = -3\left(-\frac{1}{6}\right)^2 - \left(-\frac{1}{6}\right) + 2 = -\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + 2 = \frac{25}{12}$$

Por lo tanto, el vértice de la parábola $y = -3x^2 - x + 2$ es $V_2 = \left(-\frac{1}{6}; \frac{25}{12}\right)$

Finalmente debemos hallar la distancia entre los puntos V_1 y V_2.

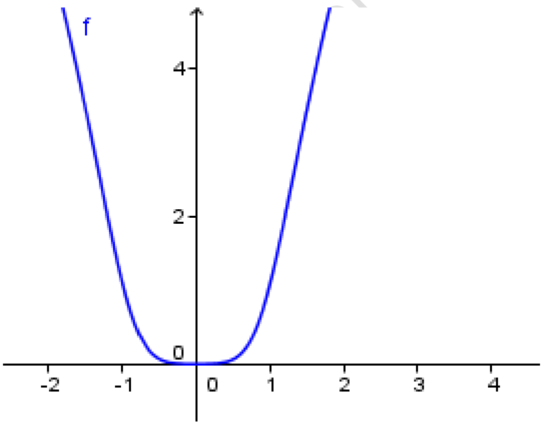
$$d(V_1; V_2) = \sqrt{(V_{2x} - V_{1x})^2 + \left(V_{2y} - V_{1y}\right)^2}$$

$$d(V_1; V_2) = \sqrt{\left(-\frac{1}{6} - 3\right)^2 + \left(\frac{25}{12} - (-5)\right)^2}$$

$$d(V_1; V_2) = \sqrt{\left(-\frac{19}{6}\right)^2 + \left(\frac{85}{12}\right)^2} = \sqrt{\frac{361}{36} + \frac{7225}{144}} = \sqrt{\frac{1444 + 7225}{144}} = \sqrt{\frac{8669}{144}}$$

3. Hallar los máximos y/o mínimos de la función $f(x) = \ln(1 + x^4 + x^8)$

Solución



En primer lugar, para hallar los extremos relativos de una función, debemos hallar su derivada. Por lo tanto, aplicando la regla de la cadena, determinamos $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^4+x^8} \cdot (4x^3+8x^7) = \frac{4x^3(1+2x^4)}{1+x^4+x^8}$$

El dominio de f' es el conjunto de todos los números reales.
Para hallar los extremos relativos debemos ver para que valores la derivada primera se anula.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4x^3(1+2x^4)}{1+x^4+x^8} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^3(1+2x^4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

ya que $(1+2x^4) > 0$ para todo valor de x.

La función f' se anula si $x = 0$
Para determinar si la función tiene un extremo relativo cuando $x = 0$ debemos analizar que sucede en los intervalos $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$

- En $(-\infty; 0)$ la función es decreciente ya que $f'(-1) = -12 < 0$
- En $(0; +\infty)$ la función es creciente ya que $f'(1) = 12 > 0$

El punto $\big(0; f(0)\big)$ es un mínimo relativo de la función.
Nota:
Se puede utilizar el criterio de la derivada segunda para decidir si el punto con abscisa $x = 0$ es un mínimo.

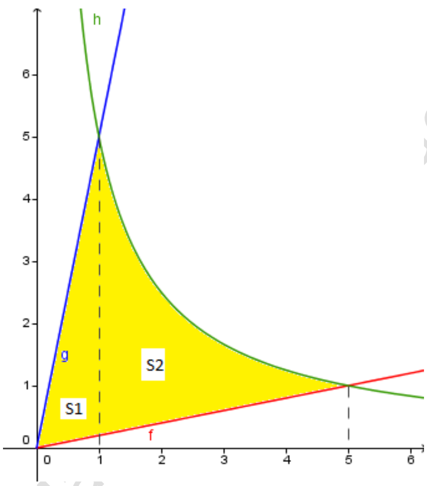
---

4. Calcular el área de la región encerrada por la gráfica de las funciones

$$f(x) = \frac{x}{5} \; ; \; g(x) = 5x \; ; \; h(x) = \frac{5}{x}$$

del primer cuadrante (es decir, la región del plano donde $x \geq 0, y \geq 0$).

Solución



Primero vamos a hallar las abscisas de los puntos donde se cortan las funciones.

$$g(x) = h(x) \quad \Leftrightarrow \quad 5x = \frac{5}{x} \quad \Leftrightarrow \quad 5x^2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x = 1} \text{ ó } \boldsymbol{x = -1}$$

Como estamos en el primer cuadrante nos quedamos con la respuesta $\boldsymbol{x = 1}$

$f(x) = h(x) \iff \frac{x}{5} = \frac{5}{x} \iff x^2 = 25 \iff \boldsymbol{x = 5}$ ó $\boldsymbol{x = -5}$

Como estamos en el primer cuadrante nos quedamos con la respuesta $\boldsymbol{x = 5}$

$$\text{Área encerrada por las gráficas} = \text{Área región } S1 + \text{Área región } S2$$

$$\text{Área región } S1 = \int_0^1 \left(5x - \frac{x}{5}\right) dx = \int_0^1 \frac{24}{5} x \; dx = \frac{24}{10} x^2 \Big|_0^1 = \frac{24}{10}$$

$$\text{Área región } S2 = \int_1^5 \left(\frac{5}{x} - \frac{x}{5}\right) dx = \left(5\ln(x) - \frac{x^2}{10}\right)\Bigg|_1^5 = \left(5\ln(5) - \frac{5^2}{10}\right) - \left(5\ln(1) - \frac{1^2}{10}\right) = 5\ln(5) - \frac{24}{10}$$

$$\text{Área encerrada por las gráficas} = \frac{24}{10} + 5\ln(5) - \frac{24}{10} = 5\ln(5)$$

El área de la región encerrada por las gráficas de las funciones del primer cuadrante es $5\ln(5)$.