APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Puntaje de cada ejercicio	2	0,50	0,50	2,50	0,50	0,50	0,50	0,50	2,50

Duración del examen: 2 hrs. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz. En los ejercicios de respuesta múltiple, elija la respuesta correcta de cada pregunta y márquela con una X.

1. **Hallar las coordenadas $(x; y)$ del punto de intersección de las gráficas de las funciones $g(x) = -3x + 2$ y $h(x)$, siendo h una función lineal que cumple que $h(1) = -8$ y $h(4) = -2$**

En principio, debemos determinar la expresión que define a la función lineal h, cuya gráfica es la recta que pasa por los puntos (1;-8) y (4;-2).

Sabemos que una función lineal es de la forma $h(x) = ax + b$ (ver inicio del apunte titulado “Función lineal” que se encuentra en el campus como material de estudio dentro de la sesión 3).

Por otra parte, en la pág. 4 del apunte referido previamente, encontramos que:

> En general si los puntos $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$ con $x_1 \neq x_2$, pertenecen a la gráfica de *f* para $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ es:
>
> $$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$$

Luego, en este caso resulta: $\frac{-2-(-8)}{4-1} = a \rightarrow \quad 2 = a$ por lo que $h(x) = 2x + b$

Finalmente, si (1;-8) pertenece a la gráfica de h, debe ser: $-8 = 2.1 + b \rightarrow -10 = b$, a partir de lo cual concluimos que $h(x) = 2x - 10$ (podríamos haber utilizado de la misma manera que (4;-2) pertenece a la gráfica de h y habríamos llegado a la misma expresión final).

Ahora bien, debemos determinar las coordenadas $(x; y)$ del punto de intersección de las gráficas g y h, para lo cual debemos resolver inicialmente: $g(x) = h(x)$ (ver ejemplo 6 del mismo apunte sobre funciones lineales, pág. 9)

Entonces: $-3x + 2 = 2x - 10 \rightarrow 2 + 10 = 2x + 3x \rightarrow 12 = 5x \rightarrow \frac{12}{5} = x$

Para determinar la segunda componente del par $(x; y)$, sustituimos $\frac{12}{5} = x$ en las expresiones que definen a las funciones g y h de la siguiente manera:

$$g\left(\frac{12}{5}\right) = -3.\frac{12}{5} + 2 = -\frac{26}{5}$$

$$h\left(\frac{12}{5}\right) = 2.\frac{12}{5} - 10 = -\frac{26}{5}$$

El punto de intersección de las gráficas g y h tiene coordenadas $\left(\frac{12}{5}; -\frac{26}{5}\right)$

2. Sean $f(x) = -2x + 3$ y $g(x) = x$ funciones lineales, el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} / f(x) > g(x)\}$ es:

a) $A = (-\infty; 1]$
b) $A = (-\infty; 1)$ **Correcta**
c) $A = [1; +\infty)$
d) $A = \{1\}$

Para determinar analíticamente el conjunto A debemos analizar para qué valores de "x" se verifica que

$f(x) > g(x)$ (o equivalentemente, que $f(x) - g(x) > 0$).

En este punto, les sugerimos releer los ejemplos del apunte "Inecuaciones" y el ejercicio 7 (inciso b) del archivo titulado "Función lineal", que pueden encontrar en el campus como material de estudio dentro de las sesiones 1 y 3, respectivamente.

Para este caso particular, a partir de la expresión $f(x) > g(x)$, planteamos:

$$-2x + 3 > x \quad \to \quad 3 > x + 2x \quad \to \quad 3 > 3x$$

$$\to \quad 1 > x$$

Luego, $A = \{x \in \mathbb{R} / 1 > x\} = (-\infty; 1)$

---

3. Determinar en cuál de las siguientes opciones se muestra correctamente el dominio de $f^{-1}(x)$, siendo $f(x) = \frac{x}{2}$

a) $Dom(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{0\}$

b) $Dom(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{2\}$

c) $Dom(f^{-1}) = \mathbb{R}$ **Correcta**

d) $Dom(f^{-1}) = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

En primer lugar, les sugerimos revisar la definición de función inversa y la resolución de los ejemplos 4 y 5 que se presentan en el material de estudio titulado "Función inversa" correspondiente a la sesión 5 de trabajo.

En este caso, siendo $y = \frac{x}{2}$, resulta $2y = x$,de donde se desprende directamente que $f^{-1}(x) = 2x$

Luego, siendo f^{-1} una función lineal, resulta inmediato que $Dom(f^{-1}) = \mathbb{R}$

---

4. Hallar la ecuación y las raíces de la parábola cuyo vértice es el punto $V = (1; -2)$ y pasa por el punto $\left(0; -\frac{3}{2}\right)$

Para hallar la ecuación pedida es conveniente por cuestiones de simplicidad trabajar a partir de la expresión canónica asociada a una función cuadrática, siendo que conocemos las coordenadas del vértice de la parábola y un punto de esta.

De esta forma, planteamos $f(x) = a(x - b)^2 + c$, siendo $V = (b; c)$ las coordenadas del vértice correspondiente (les sugerimos revisar la página 6 del material de estudio titulado "Función cuadrática" correspondiente a la sesión 4 donde se aborda este contenido partiendo de un ejemplo).

Para este caso particular, resulta: $f(x) = a(x-1)^2 - 2$

Para determinar el valor de a en la expresión de f debemos tener presente que si el punto $\left(0; -\frac{3}{2}\right)$ pertenece a la parábola cuya expresión queremos encontrar, debe ser:

$$-\frac{3}{2} = a(0-1)^2 - 2 \rightarrow \ -\frac{3}{2} = a - 2 \rightarrow \ -\frac{3}{2} + 2 = a \rightarrow \ \frac{1}{2} = a$$

Luego, $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2$

Finalmente, para hallar las raíces de f, debemos resolver $f(x) = 0$, es decir, $\frac{1}{2}(x-1)^2 - 2 = 0$

$$\frac{1}{2}(x-1)^2 - 2 = 0$$
$$\frac{1}{2}(x-1)^2 = 2$$
$$\frac{1}{2}(x-1)^2 = 2 : \frac{1}{2}$$
$$(x-1)^2 = 4$$

Ahora bien, recordemos que :

$\sqrt{a^2} = |a|$ **para cualquier número real a.**

(Ver material de estudio titulado "Valor absoluto", correspondiente a la sesión 2)

Entonces, del paso $(x-1)^2 = 4$, aplicando raíz cuadrada en ambos miembros de la igualdad, se obtiene:

$$|x-1| = \sqrt{4}$$

$$|x-1| = 2$$

$$x - 1 = 2 \quad o \quad x - 1 = -2$$

Para entender mejor por qué a partir de $|x-1| = 2$ se concluye $x - 1 = 2 \quad o \quad x - 1 = -2$ les proponemos revisar el ejemplo 4 del mismo apunte de valor absoluto referido anteriormente.

De $x - 1 = 2 \quad o \quad x - 1 = -2$ se obtiene directamente que $x = 3 \quad o \quad x = -1$

---

5. El conjunto de negatividad de la función $f(x) = \frac{x^4}{2} - x^2$ es:

a) $\left(-\sqrt{2}; 0\right) \cup \left(0; \sqrt{2}\right)$ **Correcta**
b) $\left(\sqrt{2}; +\infty\right)$
c) $\left(-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right)$
d) $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$

En principio, recordemos qué se entiende por conjunto de negatividad de una función, de acuerdo con la información proporcionada en el material de estudio titulado "Funciones" correspondiente a la sesión 3:

El conjunto de **negatividad** (C^-) de una función es el subconjunto del dominio cuyas imágenes son números negativos.

$$C^- = \{x \in Dom(f) / f(x) < 0\}$$

Gráficamente son los elementos del dominio para los que la curva se encuentra por debajo del eje x.

En este caso, debemos plantear: $C^- = \left\{x \in \Re / \frac{x^4}{2} - x^2 < 0\right\}$

Luego, $\frac{x^4}{2} - x^2 < 0 \rightarrow \; x^4 < 2x^2 \; \rightarrow \; x^4 - 2x^2 < 0 \rightarrow x^2.(x^2 - 2) < 0$

Ahora bien, para que $x^2.(x^2 - 2) < 0$ debe darse alguna de las siguientes situaciones:

$x^2 < 0 \; y \; x^2 - 2 > 0$ o $x^2 > 0 \; y \; x^2 - 2 < 0$ (para comprender mejor de dónde surgen las alternativas planteadas les sugerimos releer los ejemplos del apunte "Ecuaciones e inecuaciones" que se incluye en el campus como material de estudio dentro de la sesión 2).

Finalmente, veamos que la primera alternativa $x^2 < 0 \; y \; x^2 - 2 > 0$ no puede darse en el conjunto de los números reales, ya que $x^2 \geq 0$ para cualquier número real que asignemos a "x".

En el segundo caso, de $x^2 > 0 \; y \; x^2 - 2 < 0$ se obtiene que $x^2 > 0 \; y \; x^2 < 2 \rightarrow x \in \Re - \{0\} \; y \; |x| < \sqrt{2}$

$$\rightarrow x \in \Re - \{0\} \;\; y \;\; -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \quad \rightarrow \quad x \in (-\sqrt{2}; 0) \cup (0; \sqrt{2})$$

---

6. Siendo $g(x) = 2x - 2$ cuál de las opciones representa al conjunto $A = \{x \in R: (gog)(x) = 6\}$

a) $A = \{3\}$ **Correcta**
b) $A = \{1\}$
c) $A = \emptyset$
d) $A = \{x \in R\}$

En primer lugar, debemos obtener la expresión analítica de la función gog ($se\ lee$ "g compuesta con g")

Recordemos que, en general:

Dadas las funciones

$$f: A \rightarrow B \; y \; g: C \rightarrow D$$

bajo ciertas condiciones es posible obtener una función **h** que se denomina ***función compuesta de g con f*** que se define por: **h:**

$$\mathbf{A \rightarrow D /\ h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))}$$

(Ver el material de estudio titulado "Composición de funciones" que se incluye en el campus dentro de la sesión 5)

Luego, en este caso particular, resulta:

$$(gog)(x) = g\big(g(x)\big) = 2.(2x-2)-2$$

Es decir, $(gog)(x) = 4x - 6$

De aquí se desprende directamente que $(gog)(x) = 6 \rightarrow 4x - 6 = 6 \rightarrow 4x = 12 \rightarrow x = 3$ y por lo tanto

$$A = \{3\}$$

---

7. ¿Cuál es el valor de $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^+$, si los puntos $\boldsymbol{C} = (\mathbf{1}\,;\ \mathbf{2}\boldsymbol{k} - \mathbf{1})$ y $\boldsymbol{D} = (\mathbf{4}\,;\ \boldsymbol{k})$ distan 5 unidades?

a) 5 correcta

b) 3

c) -5

d) 17

En primer lugar, recordemos que la expresión que define a la distancia entre dos puntos es:

$$d(A\,;B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Para comprender mejor de dónde surge esta expresión y ver algunos ejemplos de cómo se calcula, les sugerimos revisar el material de estudio “Distancia entre puntos”, incluido en el campus dentro de la sesión 2.

En el caso particular de este ejercicio, resulta:

$$d(C;D) = \sqrt{(1-4)^2 + (2k-1-k)^2}$$

$$d(C;D) = \sqrt{(-3)^2 + (k-1)^2}$$

Siendo que, de acuerdo con el enunciado, $d(C;D) = 5$ entonces:

$$\sqrt{(-3)^2 + (k-1)^2} = 5$$

$$9 + (k-1)^2 = 25$$

$$(k-1)^2 = 16$$

$$|k-1| = 4$$

$$k - 1 = 4 \quad o \quad k - 1 = -4$$

$$k = 5 \quad o \quad k = -3$$

Sin embargo, siendo que $k \in \mathbb{R}^+$, el único valor que cumple con dicha condición es $k = 5$

Nota: la justificación conceptual de los pasos $(k-1)^2 = 16 \rightarrow |k-1| = 4 \rightarrow\ k - 1 = 4 \quad o \quad k - 1 = -4$ es idéntica a la dada en la resolución del ejercicio 4

---

8. La asíntota horizontal de la función $f(x) = \dfrac{4x+1}{x^2-5x+6}$ **es:**

a) $y = 0$ Correcta
b) $y = 2$, $y = 3$
c) $y = 2$
d) No tiene asíntotas horizontales

Comencemos revisando bajo qué condiciones una función tiene asíntotas horizontales:

En general si *f* es una función tal que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = k \quad \text{ó} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = k$$

siendo k un número real, *y = k* es una asíntota horizontal de *f*.

(Ver el material de estudio titulado "Límite y asíntotas" que se incluye en el campus dentro de la sesión 6)

En este caso debemos empezar calculando $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x+1}{x^2-5x+6}$

Les sugerimos, en este punto, revisar los ejemplos resueltos en el material de estudio sobre límites y asíntotas referido previamente.

Luego: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x+1}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{4x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}$

Observamos que cuando x toma valores cada vez más grandes ($x \to +\infty$) los términos $\frac{4}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{5}{x}$ y $\frac{6}{x^2}$ tienden a 0, por lo que en definitiva " $\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}$ " tiende a 0 y "$1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}$" tiende a 1.

De ello se desprende directamente que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x+1}{x^2-5x+6} = 0$

El límite $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x+1}{x^2-5x+6}$ se resuelve análogamente.

Siendo que 0 es un número real, concluimos que $y = 0$ es asíntota horizontal de f.

---

9. Dados los conjuntos $\boldsymbol{C = \{x \in \mathbb{R} \ / \ (x-3)^2 + 1 < 10\}}$ $\quad \boldsymbol{D = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) > 3x\}}$

Expresar como intervalo o unión de intervalos el conjunto $\boldsymbol{C \cap D}$.

El enunciado nos pide expresar como intervalo o unión de intervalos el conjunto que resulta de la intersección entre los conjuntos C y D.

Recordemos que, en general:

- **Intersección de A y B** al conjunto formado por los elementos comunes de A y de B.
  Lo denotamos $A \cap B$ (se lee A intersección B).
  En símbolos: $\mathbf{A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}}$
  (El símbolo $\wedge$ significa **"y"**)

(Ver el material de estudio titulado "Intervalos" que se incluye en el campus dentro de la sesión 2)

Luego, $\boldsymbol{C \cap D} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \ / \ (\boldsymbol{x}-\mathbf{3})^{\mathbf{2}}+\mathbf{1}<\mathbf{10} \ \wedge \quad \mathbf{2} \cdot \left(\boldsymbol{x}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)>\mathbf{3}\boldsymbol{x}\right\}$

Notemos que en ambos casos debemos resolver una inecuación.

En este punto, les sugerimos releer los ejemplos de los apuntes "Inecuaciones", "Ecuaciones e inecuaciones" y "valor absoluto" que están disponibles en el campus dentro de las sesiones 1 y 2.

1) $(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})^{\mathbf{2}}+\mathbf{1}<\mathbf{10} \rightarrow (\boldsymbol{x}-\mathbf{3})^{\mathbf{2}}<\mathbf{9} \rightarrow |\boldsymbol{x}-\mathbf{3}|<\mathbf{3} \rightarrow -\mathbf{3}<\boldsymbol{x}-\mathbf{3}<\mathbf{3} \rightarrow \mathbf{0}<\boldsymbol{x}<\mathbf{6}$
2) $\mathbf{2} \cdot \left(\boldsymbol{x}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)>\mathbf{3}\boldsymbol{x} \rightarrow \mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{1}>\mathbf{3}\boldsymbol{x} \rightarrow \mathbf{1}>\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{2}\boldsymbol{x} \rightarrow \mathbf{1}>\boldsymbol{x}$

Finalmente:

$$\boldsymbol{C \cap D} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \ / \ \mathbf{0}<\boldsymbol{x}<\mathbf{6} \ \wedge \quad \mathbf{1}>\boldsymbol{x}\} = (\mathbf{0};\mathbf{1})$$