



Matemática

Clave de corrección primer parcial

Primer turno – Tema 1 - 23/04/2019

Ejercicio 1 (2 puntos)

Hallar la ecuación y las raíces de la parábola cuyo vértice es el punto $V = (-1; 8)$ y pasa por el punto $(0; 4)$.

Si conocemos las coordenadas del vértice, la ecuación de la parábola la podemos expresar como

$$y = a(x - (-1))^2 + 8$$

$$y = a(x + 1)^2 + 8$$

Para hallar el valor de la constante “a” usamos la información de que pasa por el punto $(0; 4)$:

$$4 = a(0 + 1)^2 + 8$$

$$4 = a + 8 \quad \rightarrow \quad a = -4$$

La ecuación de la parábola es $y = -4 \cdot (x + 1)^2 + 8 = -4x^2 - 8x + 4$

Para hallar las raíces usamos la fórmula de la resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 4}}{2 \cdot (-4)} = \frac{8 \pm \sqrt{128}}{-8}$$

Las raíces son:

$$x_1 = \frac{8 - \sqrt{128}}{-8} \quad x_2 = \frac{8 + \sqrt{128}}{-8}$$

Otra forma de resolver el ejercicio:

Sea $y = ax^2 + bx + c$ la ecuación de la parábola.

Como pasa por el punto $(0; 4)$ tenemos que

$$4 = a(0)^2 + b(0) + c \quad \rightarrow \quad c = 4 \quad \rightarrow \quad y = ax^2 + bx + 4$$

La coordenada x del vértice se puede calcular como

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad \rightarrow \quad -1 = -\frac{b}{2a} \quad \leftrightarrow \quad b = 2a \quad \rightarrow \quad y = ax^2 + 2ax + 4$$

Por último, para despejar el valor de la constante “a” usamos que



$$y_v = ax_v^2 + 2ax_v + 4$$

$$8 = a(-1)^2 + 2a(-1) + 4$$

$$8 = a - 2a + 4 \rightarrow a = -4 \quad \therefore \quad b = -8$$

La ecuación de la parábola es $y = -4x^2 - 8x + 4$

Para hallar las raíces usamos la fórmula de la resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 4}}{2 \cdot (-4)} = \frac{8 \pm \sqrt{128}}{-8}$$

Las raíces son:

$$x_1 = \frac{8 - \sqrt{128}}{-8} \quad x_2 = \frac{8 + \sqrt{128}}{-8}$$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Dados los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} / (x + 2)^2 - 6 \leq 10\} \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} / 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 3x\right\}$$

Expresar como intervalo o unión de intervalos el conjunto $A \cap B$.

Resolvemos la inecuación correspondiente al conjunto A:

$$(x + 2)^2 - 6 \leq 10$$

$$(x + 2)^2 \leq 16$$

$$\sqrt{(x + 2)^2} \leq \sqrt{16}$$

$$|x + 2| \leq 4$$

$$-4 \leq x + 2 \leq 4 \quad \leftrightarrow \quad -6 \leq x \leq 2 \quad \rightarrow \quad x \in [-6; 2]$$

Por lo tanto, $A = [-6; 2]$.

Resolvemos la inecuación correspondiente al conjunto B:

$$2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 3x$$

$$2x - 1 \geq 3x$$

$$2x - 3x \geq 1$$

$$-x \geq 1 \quad \leftrightarrow \quad x \leq -1 \quad \rightarrow \quad x \in (-\infty; -1]$$

Por lo tanto, $B = (-\infty; -1]$

Entonces:



$$A \cap B = [-6; 2] \cap (-\infty; -1] = [-6; -1]$$

$$A \cap B = [-6; -1]$$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Hallar, si existe, el valor de la constante $k \in \mathbb{R}$ para que la recta que pasa por los puntos $A = (3; 2)$ y $B = (-1; 6)$ y la recta de ecuación $y = -\frac{3}{2}kx + 4$ sean paralelas.

Primero hallamos la recta que pasa por los puntos $A = (3; 2)$ y $B = (-1; 6)$. Esta recta es de la forma $y = mx + b$.

$$2 = 3m + b$$

$$6 = -1m + b$$

Restando las ecuaciones

$$-4 = 4m$$

$$-\frac{4}{4} = m \quad \leftrightarrow \quad -1 = m$$

Entonces

$$2 = 3 \cdot (-1) + b \quad \leftrightarrow \quad 2 + 3 = b \quad \rightarrow \quad 5 = b$$

La ecuación de la recta es

$$y = -1x + 5$$

Como las rectas deben ser paralelas, las pendientes deben ser iguales:

$$-1 = -\frac{3}{2}k \quad \leftrightarrow \quad k = \frac{2}{3}$$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Dada la función

$$f(x) = \frac{-3mx}{2x + 3}$$

hallar los valores de la constante $m \in \mathbb{R}$ para que $f^{-1}(-3) = m$

En primer término hallamos la función inversa de f .

Partiendo de



$$y = \frac{-3mx}{2x+3}$$

despejamos la expresión de x :

$$\begin{aligned}y(2x+3) &= -3mx \\2xy+3y &= -3mx \\2xy+3mx &= -3y \\x(2y+3m) &= -3y \\x &= \frac{-3y}{2y+3m}\end{aligned}$$

Haciendo un cambio en el nombre de las variables

$$f^{-1}(x) = \frac{-3x}{2x+3m}$$

Como $f^{-1}(-3) = m$

$$\begin{aligned}m &= \frac{-3 \cdot (-3)}{2 \cdot (-3) + 3m} \\m &= \frac{9}{-6 + 3m} \\(-6 + 3m)m &= 9 \\3m^2 - 6m &= 9 \\3m^2 - 6m - 9 &= 0 \\m^2 - 2m - 3 &= 0\end{aligned}$$

Usando la fórmula resolvente llegamos a que hay dos valores posibles:

$$m = 3 \text{ y } m = -1.$$

Otra manera de resolver el ejercicio

Si $f^{-1}(-3) = 0$ entonces $f(f^{-1}(-3)) = f(m)$, pero como $f(f^{-1}(-3)) = -3$ tenemos que

$$\begin{aligned}f(m) &= -3 \\ \frac{-3m \cdot (m)}{2 \cdot (m) + 3} &= -3 \quad \left(m \neq -\frac{3}{2}\right) \\ -3m^2 &= -3 \cdot (2m + 3) \\ -3m^2 &= -6m - 9 \\ -3m^2 + 6m + 9 &= 0 \\ m^2 - 2m - 3 &= 0\end{aligned}$$

Usando la fórmula resolvente llegamos a que hay dos valores posibles:

$$m = 3 \text{ y } m = -1.$$