APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Puntaje de cada ejercicio	2,50	0,50	0,50	2	0,50	0,50	0,50	0,50	2,50

Duración del examen: 2 hrs. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz. En los ejercicios de respuesta múltiple, elija la respuesta correcta de cada pregunta y márquela con una X.

1. Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} / \ (x+2)^2 - 6 \leq 10\}$ $\quad B = \left\{x \in \mathbb{R} / \ 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 3x\right\}$

Expresar como intervalo o unión de intervalos el conjunto $A \cap B$.

El primer paso para la resolución de este ejercicio es escribir cada uno de los conjuntos como intervalos.

Para el conjunto A:

$$(x+2)^2 - 6 \leq 10 \ \Rightarrow \ (x+2)^2 \leq 16 \ \Rightarrow \ |x+2| \leq 4$$

Aplicando las propiedades de valor absoluto:

$$|x+2| \leq 4 \ \Rightarrow \ -4 \leq x+2 \leq 4 \ \Rightarrow \ -6 \leq x \leq 2$$

Por lo tanto $A = [-6; 2]$.

De la misma forma determinamos el intervalo correspondiente al conjunto B:

$$2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 3x \ \Rightarrow 2x - 1 \geq 3x \ \Rightarrow \ -x \geq 1 \ \Rightarrow x \leq -1$$

Por lo tanto $B = (-\infty; -1]$.

Entonces:

$$A \cap B = [-6; -1]$$

La teoría necesaria para la resolución de este ejercicio se encuentra en:

Sesión 2 – Apunte: Ecuaciones e inecuaciones.

2. La asíntota horizontal de la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-9}$ **es:**

a) $y=1$ **Correcta**
b) $y=3$
c) $y=-3$
d) $y=3\,,\ y=-3$

Si $\boldsymbol{y=k}$ es asíntota horizontal de $\boldsymbol{f(x)}$, de acuerdo a su definición debe verificarse que:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=k \quad o \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=k$$

Por lo tanto debemos calcular dicho límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2-9}$$

Cuando $\boldsymbol{x}$ toma valores cada vez más grandes ($\boldsymbol{x}\to+\infty$) tanto el tanto el numerador como el denominador de $\frac{x^2}{x^2-9}$ se hacen infinitamente grandes, por lo que no podemos decir cómo se comporta la función.

Decimos que en este caso se presenta una indeterminación. Para poder resolverlo, dividimos numerador y denominador por $\boldsymbol{x^2}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2-9}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{9}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{9}{x^2}}$$

Observamos que cuando $\boldsymbol{x}$ toma valores cada vez más grandes, ($\boldsymbol{x}\to+\infty$) , $\frac{9}{x^2}$ se acerca a cero (tiende a $\mathbf{0}$) y $\mathbf{1}-\frac{9}{x^2}$ se acerca a $\mathbf{1}$, por lo que el cociente $\frac{1}{1-\frac{9}{x^2}}$ tiende a $\mathbf{1}$.

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2-9}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{9}{x^2}}=1$$

En este caso, el análisis es igual cuando $\boldsymbol{x}$ toma valores cada vez menores, ($\boldsymbol{x}\to-\infty$), ya que al estar elevado al cuadrado, los valores son los mismos.

Entonces:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2-9}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2-9}=1$$

Por lo tanto la función tiene una asíntota horizontal de ecuación $\boldsymbol{y=1}$ que corresponde a la respuesta a).

La teoría necesaria para la resolución de este ejercicio se encuentra en:

Sesión 6 – Apunte: Límites y Asíntotas.

3. Siendo $f(x) = -x^2 + 1$ y $g(x) = x^{-1}$, el dominio de la función $h(x) = (gof)(x)$, es:

a) $Dom: \Re$
b) $Dom: \Re - \{1\}$
c) $Dom: \Re - \{-1; 1\}$ **Correcta**
d) $Dom: \Re - \{-1\}$

Para determinar el dominio de la función $\boldsymbol{h}$, debemos hallar la expresión de esta función:

$$h(x) = (gof)(x) \Rightarrow h(x) = g(f(x)) \Rightarrow h(x) = g(-x^2 + 1) \Rightarrow h(x) = (-x^2 + 1)^{-1} \Rightarrow h(x) = \frac{1}{-x^2 + 1}$$

La función está definida para todos los números reales excepto los que anulen el denominador, es decir que $-x^2 + 1 \neq 0$.

Resolvemos la ecuación: $-x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = 1 \ o \ x = -1$

Por lo tanto: $Dom\ (h) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ que corresponde a la respuesta c).

La teoría necesaria para la resolución de este ejercicio se encuentra en:

Sesión 3 – Apunte: Funciones.

Sesión 5 – Apunte: Composición de funciones.

---

4. Hallar las coordenadas $(x; y)$ del punto de intersección de las gráficas de las funciones: $f(x) = 2x + 6$ y $g(x)$, siendo g una función lineal que cumple que $g(2) = 7$ y $g(3) = 12$

Lo primero que debemos averiguar es cuál es la función $g(x)$. Si $g(x)$ es una función lineal, su fórmula tiene la siguiente expresión: $g(x) = ax + b$, donde a es la pendiente y b la ordenada al origen. Para determinar el valor de b utilizamos los puntos $(2; 7)$ y $(3; 12)$ que pertenecen a su gráfica.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a = \frac{12 - 7}{3 - 2} \Rightarrow a = 5$$

Si $a = 5$ entonces $g(x) = 5x + b$, reemplazamos con las coordenadas de uno de los dos puntos dados, como $g(2) = 7$:

$$7 = 5.2 + b \Rightarrow 7 = 10 + b \Rightarrow -3 = b$$

Por lo tanto: $g(x) = 5x - 3$

Para hallar el punto de intersección de las gráficas de las funciones f y g debemos resolver la ecuación que queda planteada al igualar ambas funciones. Esto es así ya que en dicho punto las funciones toman el mismo valor.

$$f(x) = g(x)$$

$$2x + 6 = 5x - 3 \Rightarrow 9 = 3x \Rightarrow x = 3$$

Uno de los puntos que pertenecen a la gráfica de $g(x)$ es $(3; 12)$, por lo tanto este es el punto de intersección de ambas gráficas.

Si deseamos verificarlo podemos calcular $f(3) = 2.3 + 6 \Rightarrow f(3) = 12 \Rightarrow (3; 12)$ también es un punto de la gráfica de la función $f(x)$.

Por lo tanto el punto de intersección de las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ es el punto de coordenadas $(3; 12)$.

La teoría necesaria para la resolución de este ejercicio se encuentra en:
Sesión 3 – Apunte: Función lineal.

5. ¿Cuál es el valor de $k \in \mathbb{R}^-$, si los puntos $A = \left(-\frac{11}{2}\,;\,-4\right)$ y $B = (-8\,;\,k)$ distan $6,5$ unidades?

a) -10 Correcta

b) -2

c) 2

d) -32

El enunciado plantea:

$$D(A;B) = 6,5 \;\Rightarrow D(A;B) = \frac{13}{2}$$

Utilizando la fórmula correspondiente a la distancia entre dos puntos:

$$D(A;B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$\frac{13}{2} = \sqrt{\left(-\frac{11}{2} - (-8)\right)^2 + (-4-k)^2}$$

$$\frac{13}{2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + (-4-k)^2} \;\Rightarrow\; \frac{169}{4} = \frac{25}{4} - (-4-k)^2$$

$$\frac{169}{4} - \frac{25}{4} = (-4-k)^2 \;\Rightarrow 36 = (-4-k)^2$$

$$|-4-k| = 6 \;\Rightarrow\; -4-k = 6 \;\; o \;\; -4-k = -6$$

$$-k = 10 \;\; o \;\; -k = -2$$

$$k = -10 \;\; o \;\; k = 2$$

Pero en el enunciado nos indica que $k \in \mathbb{R}^-$, por lo tanto el único valor posible es $k = -10$, que corresponde a la respuesta a).

La teoría necesaria para la resolución de este ejercicio se encuentra en:

Sesión 2 – Apunte: Distancia entre puntos.

---

6. Determinar en cuál de las siguientes opciones se muestra correctamente el dominio de $f^{-1}(x)$, siendo $f\,(x) = \sqrt[3]{x+1}$.

a) $Dom(f^{-1}) = \mathbb{R}$ Correcta

b) $Dom(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{-1\}$

c) $Dom(f^{-1}) = [-1; +\infty)$

d) $Dom(f^{-1}) = (-1; +\infty)$

Lo primero que necesitamos conocer son los conjuntos sobre los cuales está definida la función. Para determinar su dominio analizamos la fórmula que la define.

La función f es un raíz cúbica, como cualquier número real tiene raíz cúbica, $x + 1$ puede ser un número real cualquiera, esto significa que $Dom\,(f) = \mathbb{R}$. A su vez el conjunto imagen también es $\mathbb{R}$ ya que todos los números reales pueden obtenerse como resultado de una raíz cúbica.

Por lo tanto $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Hallamos la función inversa $\boldsymbol{f^{-1}}$:

$$y = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow y^3 = x+1 \Rightarrow y^3 - 1 = x$$

Haciendo un intercambio de las variables llegamos a la expresión de $\boldsymbol{f^{-1}}$:

$$y = x^3 - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^3 - 1$$

f^{-1} es una función polinómica, por lo tanto $\mathrm{Dom}(\mathrm{f}^{-1}) = \mathbb{R}$ que corresponde a la respuesta a).

La teoría necesaria para la resolución de este ejercicio se encuentra en:

Sesión 3 – Apunte: Funciones.

Sesión 5 – Apunte: Función inversa.

---

7. El conjunto de positividad de la función $f(x) = \frac{x^4}{2} - x^2$ es:

a) $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$ **Correcta**
b) $(\sqrt{2}; +\infty)$
c) $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$
d) $(-\sqrt{2}; 0) \cup (0; \sqrt{2})$

Para determinar el conjunto de positividad de la función es necesario determinar el conjunto de ceros, para lo cual factorizamos la función:

Sacamos factor común: $f(x) = \frac{x^4}{2} - x^2 \Rightarrow f(x) = x^2\left(\frac{x^2}{2} - 1\right)$

Hallamos los ceros del segundo factor: $\frac{x^2}{2} - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow |x| = \sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{2}$ *o* $x = -\sqrt{2}$.

Por lo tanto podemos escribir la función: $f(x) = \frac{1}{2}x^2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ y $C^0 = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$.

Para determinar el conjunto de positividad, aplicamos el Teorema de Bolzano:

$(-\infty; -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}; 0)$	$(0; \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}; +\infty)$
$x = -2$ $f(-2) = \frac{(-2)^4}{2} - (-2)^2$ $f(-2) = \frac{16}{2} - 4$ $f(-2) = 4$ Intervalo de Positividad	$x = -1$ $f(-1) = \frac{(-1)^4}{2} - (-1)^2$ $f(-1) = \frac{1}{2} - 1$ $f(-1) = -\frac{1}{2}$ Intervalo de Negatividad	$x = 1$ $f(1) = \frac{1^4}{2} - 1^2$ $f(1) = \frac{1}{2} - 1$ $f(1) = -\frac{1}{2}$ Intervalo de Negatividad	$x = 2$ $f(2) = \frac{2^4}{2} - 2^2$ $f(2) = \frac{16}{2} - 4$ $f(2) = 4$ Intervalo de Positividad

Por lo tanto $C^+ = (-\infty; -\sqrt{2}) U (\sqrt{2}; +\infty)$ que corresponde a la respuesta a).

La teoría necesaria para la resolución de este ejercicio se encuentra en:

Sesión 4 – Apunte: Función polinómica.

---

8. Sean $f(x) = -2x + 3$ y $g(x) = x$ funciones lineales, el conjunto $A = \{x \in \Re / f(x) \leq g(x)\}$ es:

a) $A = [1;\ +\infty)$ Correcta
b) $A = (1;\ +\infty)$
c) $A = (-\infty; 1]$
d) $A = [0;\ +\infty)$

El conjunto $\boldsymbol{A}$ es el conjunto de números reales que verifica la condición $\boldsymbol{f(x)} \leq \boldsymbol{g(x)}$:

$$-2x + 3 \leq x \implies -3x \leq -3 \implies x \geq -3 : (-3) \implies x \geq 1$$

Por lo tanto $\boldsymbol{A} = [\mathbf{1}; +\infty)$ que corresponde a la respuesta a).

La teoría necesaria para la resolución de este ejercicio se encuentra en:

Sesión 1 – Apunte: Inecuaciones.

Sesión 2 – Apunte: Números reales.

---

9. Hallar la ecuación y las raíces de la parábola cuyo vértice es el punto $V = (-1; 8)$ y pasa por el punto $(0; 4)$.

Como la información que tenemos de la parábola son las coordenadas de su vértice y las coordenadas de otro punto, resulta conveniente trabajar con su expresión canónica: $\boldsymbol{f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v}$, en este caso al reemplazar las coordenadas del vértice nos queda:

$$f(x) = a\big(x - (-1)\big)^2 + 8 \implies f(x) = a(x + 1)^2 + 8$$

Para determinar el valor de $\boldsymbol{a}$, utilizamos las coordenadas del otro punto que tenemos como dato:

$$f(0) = a(0 + 1)^2 + 8 \implies 4 = a.1 + 8 \implies -4 = a$$

Por lo tanto la ecuación correspondiente es:

$$f(x) = -4(x + 1)^2 + 8$$

La teoría necesaria para la resolución de este ejercicio se encuentra en:

Sesión 4 – Apunte: Función cuadrática.