PRIMER TURNO (09/10/2017)

TEMA 4

Ejercicio 1 (2 puntos)

Hallar el conjunto de positividad (C^+) del polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 - 8x^2$

Respuesta

Si sacamos a x^2 de factor común la expresión del polinomio resulta ser:

$P(x) = x^2(x^2 - 2x - 8)$

Hallemos primeramente las raíces de $P(x)$. Una es claramente el cero y las otras se obtienen de hallar las raíces de $x^2 - 6x + 8$ que, dado que se trata de una expresión cuadrática, pueden encontrarse mediante la resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1}$$

obteniéndose dos raíces en los valores -2 y 4.

Aplicando el método de Bolzano, o sea, verificando que signo toman los valores de la función en los intervalos limitados por las raíces 0, 2 y 4 de la función $P(x)$, obtenemos:

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2{,}0)$	0	$(0{,}4)$	4	$(4,+\infty)$
$P(x)$	+	**0**	-	**0**	-	**0**	+

Por lo tanto $\boldsymbol{C^+ = (-\infty;-2) \cup (4;+\infty)}$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Dada la función $f(x) = \frac{x}{3x-k}$ hallar su función inversa $f^{-1}(x)$ y obtener el valor de la constante $k \in \mathbb{R}$ para que se cumpla que $f^{-1}(2) = 4$

Respuesta

Para calcular $f^{-1}(x)$ planteamos:

$$y = \frac{x}{3x - k}$$

$$y(3x - k) = x$$

$$3xy - ky = x$$

$$3xy - x = ky$$

$$x(3y - 1) = ky$$

$$x = \frac{ky}{3y - 1}$$

Por lo tanto, haciendo un cambio en el nombre de la variable,

$$f^{-1}(x) = \frac{kx}{3x - 1}$$

Para que $f^{-1}(2) = 4$ debe cumplirse que

$$\frac{2k}{5} = 4 \Leftrightarrow k = 10$$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Hallar el valor de la constante $m \in \mathbb{R}$ para que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -3$ siendo

$$f(x) = \frac{mx + 6x - 2}{3x - 1}$$

Respuesta

Primero calculamos el límite de la función

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{mx + 6x - 2}{3x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(m + 6 - \frac{2}{x}\right)}{x\left(3 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{m + 6 - \frac{2}{x}}{3 - \frac{1}{x}} = \frac{m + 6}{3}$$

ya que $\lim\limits_{x\to\infty} {}^{1}/_{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} {}^{2}/_{x} = 0$

Luego

$$\frac{m+6}{3} = -3 \quad \Leftrightarrow \quad m+6=-9 \quad \Leftrightarrow \quad m=-15$$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Sea $f(x) = 2x + \boldsymbol{b}$ la función lineal cuyo gráfico contiene al punto $P_0 = (2;5)$. Hallar la ecuación de la asíntota vertical de la función $g \circ f(x)$ si se sabe que

$$g(x) = \frac{7}{3x-5}$$

Respuesta

Hallemos el valor de "b". Para ello tengamos en cuenta que:

$f(2) = 4 + b = 5 \Leftrightarrow b = 1$

Entonces,

$$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = \frac{7}{3(2x+1)-5} = \frac{7}{6x-2}$$

Para que la función "h" tenga una asíntota vertical en algún valor "a" debe cumplirse que:

$$\lim_{x\to a} \frac{7}{6x-2} = \infty$$

por lo tanto, debe anularse el denominador en $x = a$ (esto es para que el límite sea infinito)

Esto ocurrirá si

$$6a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto la ecuación de la ecuación de la asíntota vertical es $\boldsymbol{x = \frac{1}{3}}$

TEMA 5

Ejercicio 1 (2 puntos)

Hallar el valor de la constante $a \in \mathbb{R}$ para que $\lim_{x \to \infty} f(x) = -1$ siendo

$$f(x) = \frac{ax + 6x - 3}{2x - 1}$$

Respuesta

Primero calculamos el límite de la función

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{ax + 6x - 3}{2x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x\left(a + 6 - \frac{3}{x}\right)}{x\left(2 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{a + 6 - \frac{3}{x}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{a + 6}{2}$$

ya que $\lim_{x \to \infty} {}^{1}/{}_{x} = 0$, $\lim_{x \to \infty} {}^{3}/{}_{x} = 0$

.Luego

$$\frac{a + 6}{2} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad a + 6 = -2 \quad \Leftrightarrow \quad a = -8$$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Dada la función $h(x) = \frac{2x}{5x-c}$, hallar su función inversa $h^{-1}(x)$ y obtener el valor de la constante $c \in \mathbb{R}$ para que se cumpla que $h^{-1}(1) = 2$

Respuesta

Para calcular $f^{-1}(x)$ planteamos:

$$y = \frac{2x}{5x - c}$$

$$y(5x - c) = 2x$$

$$5xy - cy = 2x$$

$5xy - 2x = cy$

$x(5y - 2) = cy$

$$x = \frac{cy}{5y - 2}$$

Por lo tanto,

$h^{-1}(x) = \dfrac{cx}{5x - 2}$

Para que $h^{-1}(1) = 2$ debe cumplirse que

$\dfrac{c \cdot 1}{5 \cdot 1 - 2} = 2 \iff \dfrac{c}{3} = 2 \iff c = 6$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Hallar el conjunto de positividad (C^+) del polinomio $P(x) = x^4 + 3x^3 - 10x^2$

Respuesta

Si sacamos a x² de factor común la expresión del polinomio resulta ser:

$$P(x) = x^2(x^2 + 3x - 10)$$

Hallemos primeramente las raíces de $P(x)$. Una es claramente el cero y las otras se obtienen de hallar las raíces de $x^2 + 3x - 10$ que, dado que se trata de una expresión cuadrática, pueden encontrarse mediante la resolvente

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2}$$

obteniéndose las dos raíces en los valores -5 y 2.

Aplicando el método de Bolzano, o sea, verificando que signo toman los valores de la función en los intervalos limitados por las raíces -5, 0 y 2 de la función $P(x)$, obtenemos:

x	$(-\infty;-5)$	-5	$(-5,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$P(x)$	+	**0**	-	**0**	-	**0**	+

Por lo tanto $\boldsymbol{C^{+}} = (-\infty; \boldsymbol{-5}) \cup (\boldsymbol{2}; +\infty)$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Sean las funciones

$$f(x) = \boldsymbol{c}x + 1 \qquad ; \qquad g(x) = \frac{3x}{-x+10}$$

Hallar el valor de la constante $c \in \mathbb{R}$ para que se cumpla que

$$(g \circ f)(2) = 3$$

Respuesta

Primero debemos hallar la expresión general de la función "$(g \circ f)$"

$$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = \frac{3(cx+1)}{-(cx+1)+10} = \frac{3(cx+1)}{-cx-1+10} = \frac{3(cx+1)}{-cx+9}$$

Entonces, para que $(gof)(2) = 3$, debe ser:

$$\frac{3(c \cdot 2+1)}{-c \cdot 2+9} = 3$$

$$\frac{2c+1}{-2c+9} = 1$$

$$2c+1 = -2c+9$$

$$4c = 8 \quad \Leftrightarrow \quad c = 2$$

TEMA 6

Ejercicio 1 (2 puntos)

Hallar el conjunto de positividad (C^+) del polinomio $Q(x) = x^4 - x^3 - 6x^2$

Respuesta

Si sacamos a x^2 de factor común la expresión del polinomio resulta ser:

$$Q(x) = x^2(x^2 - x - 6)$$

Hallemos primeramente las raíces de $Q(x)$. Una es claramente el cero y las otras se obtienen de hallar las raíces de $x^2 - x - 6$ que, dado que se trata de una expresión cuadrática, pueden encontrarse mediante la resolvente

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

obteniéndose las dos raíces en los valores -2 y 3.

Aplicando el método de Bolzano, o sea, verificando que signo toman los valores de la función en los intervalos limitados por las raíces -2, 0 y 3 de la función $Q(x)$, obtenemos:

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,3)$	3	$(3,+\infty)$
$Q(x)$	+	0	-	0	-	0	+

Por lo tanto $\boldsymbol{C^+} = (-\infty; -\mathbf{2}) \cup (\mathbf{3}; +\infty)$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Dada la función $g(x) = \frac{3x}{a+4x}$, hallar su función inversa $g^{-1}(x)$ y obtener el valor de la constante $a \in \mathbb{R}$ para que se cumpla que $g^{-1}(1) = 10$

Respuesta

Para calcular $g^{-1}(x)$ planteamos:

$$y = \frac{3x}{a+4x}$$
$$y(a+4x) = 3x$$
$$ay + 4xy = 3x$$
$$4xy - 3x = -ay$$
$$x(4y-3) = -ay$$
$$x = \frac{-ay}{4y-3}$$

Por lo tanto, haciendo un cambio en el nombre de la variable

$$g^{-1}(x) = \frac{-ax}{4x-3}$$

(o también puede que en el cálculo final se obtenga, también correctamente $g^{-1} = \frac{ax}{-4x+3}$. De todas maneras el valor final de "a" será el mismo).

Para que $g^{-1}(1) = 10$ debe cumplirse que

$$\frac{-a}{4-3} = 10 \Leftrightarrow a = -10$$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Hallar el valor de la constante $t \in \mathbb{R}$ para que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -2$ siendo

$$f(x) = \frac{tx+8x-2}{4x-1}$$

Respuesta

Primero calculamos el límite de la función

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{tx+8x-2}{4x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(t+8-\frac{2}{x}\right)}{x\left(4-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{t+8-\frac{2}{x}}{4-\frac{1}{x}} = \frac{t+8}{4}$$

ya que $\lim_{x\to\infty} {}^{1}/_{x} = 0$, $\lim_{x\to\infty} {}^{2}/_{x} = 0$

Luego

$$\frac{t+8}{4} = -2 \quad \Leftrightarrow \quad t+8 = -8 \quad \Leftrightarrow \quad t = -16$$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Sea $g(x) = m\,x + 4$ la función lineal cuyo gráfico contiene al punto $P_0 = (2; 10)$. Hallar la ecuación de la asíntota vertical de la función $(f \circ g)(x)$ si se sabe que

$$f(x) = \frac{1}{2x-4}$$

Respuesta

Hallemos el valor de "m". Para ello tengamos en cuenta que:

$g(2) = 10$

$g(2) = 2m + 4$

$2m + 4 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad m = 3$

Luego, $g(x) = 3\,x + 4$

Entonces,

$$(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = \frac{1}{2(3x+4)-4} = \frac{1}{6x+4}$$

Para que la función (fog) tenga una asíntota vertical en algún valor “a” debe cumplirse que:

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{6x+4} = \infty$$

por lo tanto, debe anularse el denominador en $x = a$

Esto ocurrirá si

$$6a + 4 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$$

Por lo tanto la ecuación de la asíntota vertical es

$$x = -\frac{2}{3}$$