



TEMA 3

Ejercicio 1 (2 puntos)

Para la función

$$f(x) = e^{kx} + a(x + 5)$$

hallar los valores de las constantes $k, a \in \mathbb{R}$ de manera que la ecuación de su recta tangente en $x_0 = 0$ sea $y = 6x + 11$.

Respuesta

La ecuación de una recta tangente en x_0 está dada por la fórmula:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Como en este caso $x_0 = 0$, se reduce a:

$$y = f(0) + f'(0) \cdot x$$

Para que se cumpla lo pedido, deben cumplirse entonces que:

$$f(0) = 11 \text{ y } f'(0) = 6$$

Veamos entonces qué condiciones hay que pedirles a k y a para que esto ocurra:

$$f(0) = 1 + 5a = 11 \Leftrightarrow a = 2$$

y como

$$f'(x) = ke^{kx} + a$$

entonces

$$f'(0) = 6 \Leftrightarrow ke^{k \cdot 0} + a = 6 \Leftrightarrow k + a = 6 \Leftrightarrow k = 6 - a$$

Como ya vimos que $a = 2$, entonces $k = 4$

**Ejercicio 2 (3 puntos)**

Hallar, los valores de las abscisas de los máximos y mínimos, en caso de que existan, de

$$f(x) = -(x + 8)^2 e^{-x}$$

Respuesta

El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales.

Primero hallamos la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = -2(8 + x)e^{-x} - (8 + x)^2(-e^{-x}) = -2(8 + x)e^{-x} + (8 + x)^2 e^{-x}$$

Sacando e^{-x} de factor común y desarrollando el cuadrado:

$$f'(x) = e^{-x}[-2(8 + x) + (8 + x)^2]$$

El dominio de la función derivada es el conjunto de todos los números reales.

Notemos que para que la derivada se anule es suficiente pedir que se anule la expresión polinómica que está entre corchetes, con lo cual

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2(8 + x) + (8 + x)^2 = 0$$

Desarrollando en el miembro izquierdo el binomio cuadrado y simplificando se llega a la expresión:

$$-2(8 + x) + (8 + x)^2 = 0$$

$$-16 - 2x + 64 + 16x + x^2 = 0$$

$$48 + 14x + x^2 = 0$$

Al buscar las raíces del polinomio de grado 2, obtenemos que sus soluciones son:

$$x_{1,2} = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 192}}{2} = \frac{-14 \pm 2}{2}, \text{ o sea, } x = -8 \text{ ó } x = -6.$$

Para poder analizar el signo de la derivada podemos analizar solo el signo del polinomio de segundo grado (pues e^{-x} es siempre positivo) ya sea aplicando las propiedades vistas sobre polinomios de ese orden o aplicando Bolzano.

En cualquier caso, se llega a que:

x	$(-\infty; -8)$	-8	$(-8; -6)$	-6	$(-6; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Por lo tanto, para $f'(x)$, es $C^+ = (-\infty; -8) \cup (-6; +\infty)$

Y por lo tanto, en la abscisa $x = -8$ se obtiene un máximo y en $x = -6$ un mínimo local.



Ejercicio 3 (2 puntos)

Hallar los $x \in [5\pi; 7\pi]$ para que $f(x) = 1$ siendo

$$f(x) = e^{7\text{sen}(x+5\pi)}$$

Respuesta

Para que $f(x) = 1$ debe cumplirse que $7\text{sen}(x + 5\pi) = 0$ (ya que $e^t = 1 \Leftrightarrow t = 0$)

Como las raíces de la función seno son los valores de la forma $k\pi$ (k número entero), quiere decir que para que $f(x)$ se anule debe pedirse que:

$$x + 5\pi = k\pi \Leftrightarrow x = k\pi - 5\pi \Leftrightarrow x = \pi(k - 5).$$

Como se pide que las raíces pertenezcan al intervalo $[5\pi, 7\pi]$, entonces debe ser

$$5\pi \leq \pi(k - 5) \leq 7\pi$$

de donde se deduce que entonces

$$5 \leq k - 5 \leq 7 \Leftrightarrow 10 \leq k \leq 12$$

Por lo tanto las respuestas son: $x = 5\pi; x = 6\pi; x = 7\pi$.

Ejercicio 4 (3 puntos)

Encontrar una función $f(x)$ que satisfaga que

$$f'(x) = \frac{(3 + \sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} \quad \text{y} \quad f(0) = 15$$

Respuesta

Debemos encontrar el conjunto de primitivas de

$$\frac{(3 + \sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}}$$

y luego aquella que satisface la condición pedida.



Hallamos entonces

$$\int \frac{(3 + \sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} dx$$

Si aplicamos la sustitución

$$u = 3 + \sqrt{x},$$

entonces como

$$du = (3 + \sqrt{x})' dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx,$$

la integral se reduce a calcular:

$$\int u^2 du = \frac{u^3}{3} + a = \frac{(3 + \sqrt{x})^3}{3} + a, \quad a \in \mathbb{R}$$

Entonces, la función primitiva es

$$f(x) = \frac{(3 + \sqrt{x})^3}{3} + a, \quad a \in \mathbb{R}$$

Para que se cumpla la condición, $f(0) = 15$, especializamos en $x = 0$:

$$f(0) = \frac{(3 + \sqrt{0})^3}{3} + a = 9 + a$$

e igualamos al valor de la condición

$$9 + a = 15$$

obteniendo así $a = 6$.

La función pedida es

$$f(x) = \frac{(3 + \sqrt{x})^3}{3} + 6$$