TEMA 4

Ejercicio 1 (2 puntos)

Dadas las funciones

$$f(x) = -\frac{3}{x+1} - 4 \quad ; \quad g(x) = 4x^2 - 5x - 1$$

Hallar el dominio de la función $f \circ g(x)$

Respuesta

Primero debemos hallar la expresión de la función $f \circ g$.

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = -\frac{3}{4x^2 - 5x - 1 + 1} - 4 = -\frac{3}{4x^2 - 5x} - 4 = -\frac{3}{x(4x-5)} - 4$$

$$f \circ g(x) = \ -\frac{3}{x(4x-5)} - 4$$

Para que la función esté bien definida el denominador no debe anularse.

El denominador se anula si

$$x(4x-5) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ó } \ 4x - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ó } \ x = \frac{5}{4}$$

Luego,

$$Dom(f \circ g) = \mathbb{R} - \left\{0; \frac{5}{4}\right\}$$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Sea $f(x) = \frac{5}{7-2x} + 3$. Hallar, si existen, las ecuaciones de las asíntotas verticales de $f^{-1}(x)$.

Respuesta

Calculamos la inversa de la función f:

$$f(x) = \frac{5}{7-2x} + 3$$

$$y = \frac{5}{7-2x} + 3$$

$$y - 3 = \frac{5}{7-2x}$$

$$(7-2x) = \frac{5}{(y-3)}$$

$$-2x = \frac{5}{(y-3)} - 7$$

$$-2x = \frac{5-7(y-3)}{(y-3)}$$

$$-2x = \frac{5-7y+21}{(y-3)}$$

$$-2x = \frac{26-7y}{y-3}$$

$$x = \frac{26-7y}{-2(y-3)}$$

$$x = \frac{-7y+26}{-2y+6}$$

Por lo que resulta, haciendo un cambio en el nombre de la variable

$$f^{-1}(x) = \frac{-7x+26}{-2x+6}$$

El dominio de f^{-1} es el conjunto $\mathbb{R} - \{3\}$

Verificamos mediante el límite si la recta de ecuación $x = 3$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x\to 3} \frac{-7x+26}{-2x+6} = \infty$$

Por lo tanto, en $\boldsymbol{x = 3}$ **tenemos una asíntota vertical.**

Ejercicio 3 (2 puntos)

Hallar el conjunto de negatividad del polinomio S de grado 3 que verifica

$$S(-2) = S(1) = S(2) = 0$$

y que pasa por el punto $(0; -4)$

Respuesta

Primero debemos buscar la ecuación del polinomio $S(x)$.

Dado que $S(-2) = S(1) = S(2) = 0$, tenemos que las raíces del polinomio son $-2, 1$ y 2.

Entonces,

$S(x) = a \cdot (x + 2)(x - 1)(x - 2)$

Reemplazamos las coordenadas del punto $(0; -4)$ para hallar el coeficiente a:

$$S(0) = -4$$

$$a \cdot (0 + 2)(0 - 1)(0 - 2) = -4$$

$$a \cdot (2)(-1)(-2) = -4$$

$$a \cdot 4 = -4 \quad \Leftrightarrow \quad a = -1$$

Luego,

$S(x) = -1\,(x + 2)(x - 1)(x - 2)$

Para hallar el conjunto de negatividad del polinomio (aplicamos el teorema de Bolzano) debemos analizar el signo del polinomio en los intervalos determinados por los ceros. Es decir, debemos analizar el signo en los intervalos

$(-\infty; -2)$; $(-2; 1)$; $(1; 2)$; $(2; +\infty)$

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$S(x)$	$S(-3) > 0$	**0**	$S(0) < 0$	**0**	$S(1{,}5) > 0$	**0**	$S(3) < 0$

Luego $\boldsymbol{C^-} = (\mathbf{-2}; \mathbf{1}) \cup (\mathbf{2}; +\infty)$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Sea P el punto medio del segmento determinado por los puntos $(-1; 4)$ y $(5; 4)$.

Hallar todos los puntos $Q = (a, a + 4)$ de manera tal que la distancia entre los puntos P y Q sea igual a $\sqrt{10}$, es decir, $d(P; Q) = \sqrt{10}$

Respuesta

En primer lugar debemos buscar las coordenadas del punto medio del segmento determinado por los puntos $(-1; 4)$ y $(5; 4)$.

$$P = \left(\frac{-1+5}{2}; \frac{4+4}{2}\right) = (2; 4)$$

$$d(P; Q) = \sqrt{10}$$

Recordamos la definición de distancia entre los puntos $P = (x_1; y_1)$ y $Q = (x_2; y_2)$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{d(P; Q)}$$

$$\sqrt{(a-2)^2 + (a+4-4)^2} = \sqrt{10}$$

$$\sqrt{a^2 - 4a + 4 + a^2} = \sqrt{10}$$

$$\sqrt{2a^2 - 4a + 4} = \sqrt{10}$$

$$2a^2 - 4a + 4 = 10$$

$$2a^2 - 4a - 6 = 0$$

$$a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = 3 \quad a_2 = -1$$

Por lo tanto, los puntos buscados son

$\boldsymbol{Q_1 = (3; 7)} \qquad \boldsymbol{Q_2 = (-1; 3)}$

TEMA 5

Ejercicio 1 (2 puntos)

Hallar el conjunto de negatividad del polinomio P de grado 3 que verifica

$$P(-3) = P(-1) = P(1) = 0$$

y que pasa por el punto $(0; 6)$

Respuesta

Primero debemos buscar la ecuación del polinomio $P(x)$.

Dado que $P(-3) = P(-1) = P(1) = 0$, tenemos que las raíces del polinomio son $-3, -1$ y 1.

Entonces,

$P(x) = a \cdot (x+3)(x+1)(x-1)$

Reemplazamos las coordenadas del punto $(0; 6)$ para hallar el coeficiente a:

$$P(0) = 6$$

$$a \cdot (0+3)(0+1)(0-1) = 6$$

$$a \cdot (3)(1)(-1) = 6$$

$$a \cdot (-3) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad a = -2$$

Luego,

$P(x) = -2\,(x+3)(x+1)(x-1)$

Para hallar el conjunto de negatividad del polinomio (aplicamos el teorema de Bolzano) debemos analizar el signo del polinomio en los intervalos determinados por los ceros. Es decir, debemos analizar el signo en los intervalos

$$(-\infty; -3)\ ; (-3; -1); (-1; 1); (1; +\infty)$$

x	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; -1)$	-1	$(-1; 1)$	2	$(1; +\infty)$
$P(x)$	$P(-4) > 0$	**0**	$P(-2) < 0$	**0**	$P(0) > 0$	**0**	$P(2) < 0$

Luego $\boldsymbol{C^-} = (\mathbf{-3};\mathbf{-1}) \cup (\mathbf{1};+\infty)$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Hallar todos los puntos de la forma $Q = (K+3, K)$ de manera tal que la distancia entre los puntos P y Q sea igual a $\sqrt{10}$ (es decir, $d(P;Q) = \sqrt{10}$) siendo P el punto medio del segmento determinado por los puntos $(-2;0)$ y $(4;0)$.

Respuesta

En primer lugar debemos buscar las coordenadas del punto medio del segmento determinado por los puntos $(-2;0)$ y $(4;0)$.

$$P = \left(\frac{-2+4}{2}; \frac{0+0}{2}\right) = (1;0)$$

Recordamos la definición de distancia entre los puntos $P = (x_1; y_1)$ y $Q = (x_2; y_2)$

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = \sqrt{d(P;Q)}$$

$$P = (1;0)$$

$$Q = (K+3, K)$$

$$d(P;Q) = \sqrt{10}$$

$$\sqrt{(K+3-1)^2 + (K-0)^2} = \sqrt{10}$$

$$\sqrt{(K+2)^2 + (K)^2} = \sqrt{10}$$

$$\sqrt{K^2+4K+4+K^2} = \sqrt{10}$$

$$\sqrt{2K^2+4K+4} = \sqrt{10}$$

$$2K^2+4K+4 = 10$$

$$2K^2+4K-6 = 0$$

$$K^2+2K-3 = 0$$

$$K_{1,2} = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4\cdot(1)\cdot(-3)}}{2\cdot 1} = \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2}$$

$$\Rightarrow \quad K_1 = 1 \quad K_2 = -3$$

Por lo tanto, los puntos buscados son

$\boldsymbol{Q_1} = (\mathbf{4}; \mathbf{1}) \qquad \boldsymbol{Q_2} = (\mathbf{0}; \mathbf{-3})$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Dadas las funciones

$$h(x) = -\frac{2}{x+4} - 4 \quad ; \quad f(x) = 3x^2 + 2x - 4$$

Hallar el dominio de la función $h \circ f(x)$

Respuesta

Primero debemos hallar la expresión de la función $f \circ g$.

$$(h \circ f)(x) = h\big(f(x)\big) = -\frac{2}{3x^2 + 2x - 4 + 4} - 4 = -\frac{2}{3x^2 + 2x} - 4 = \ -\frac{2}{x \cdot (3x+2)} - 4$$

$$(h \circ f)(x) = \ -\frac{2}{x \cdot (3x+2)} - 4$$

Para que la función esté bien definida el denominador no debe anularse.

El denominador se anula si

$$x \cdot (3x+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ó } 3x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ó } x = -\frac{2}{3}$$

Luego,

$$Dom(h \circ f) = \mathbb{R} - \left\{0; -\frac{2}{3}\right\}$$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Sea

$$f(x) = 2 - 7/(x-3)$$

Hallar, si existen, las ecuaciones de las asíntotas verticales de $f^{-1}(x)$.

Respuesta

Calculamos la inversa de la función f:

$$f(x) = 2 - \frac{7}{x-3}$$
$$y = 2 - \frac{7}{x-3}$$
$$y - 2 = -\frac{7}{x-3}$$
$$(x-3) = -\frac{7}{(y-2)}$$
$$x = 3 - \frac{7}{(y-2)}$$
$$x = \frac{3(y-2)-7}{(y-2)}$$
$$x = \frac{3y-6-7}{(y-2)}$$
$$x = \frac{3y-13}{y-2}$$

Por lo que resulta, haciendo un cambio en el nombre de la variable

$$f^{-1}(x) = \frac{3x-13}{x-2}$$

El dominio de f^{-1} es el conjunto $\mathbb{R} - \{2\}$

Verificamos mediante el límite si la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x-13}{x-2} = \infty$$

Por lo tanto, en $x = 2$ **tenemos una asíntota vertical.**

TEMA 6

Ejercicio 1 (2 puntos)

Dadas las funciones

$$g(x) = -\frac{7}{x+2} - 4 \quad ; \quad f(x) = 8x^2 + 7x - 2$$

Hallar el dominio de la función $g \circ f(x)$

Respuesta

Primero debemos hallar la expresión de la función $f \circ g$.

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = -\frac{7}{8x^2 + 7x - 2 + 2} - 4 = -\frac{7}{8x^2 + 7x} - 4 = \; -\frac{7}{x \cdot (8x+7)} - 4$$

$$(g \circ f)(x) = \; -\frac{7}{x(8x+7)} - 4$$

Para que la función esté bien definida el denominador no debe anularse.

El denominador se anula si

$$x \cdot (8x+7) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ó } 8x + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ó } x = -\frac{7}{8}$$

Luego,

$$Dom(g \circ f) = \mathbb{R} - \left\{0; -\frac{7}{8}\right\}$$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Sea $f(x) = -\frac{8}{x-4} - 1$

Hallar, si existen, las ecuaciones de las asíntotas verticales de $f^{-1}(x)$

Respuesta

Calculamos la inversa de la función f:

$$f(x) = -\frac{8}{x-4} - 1$$

$$y = -\frac{8}{x-4} - 1$$

$$y + 1 = -\frac{8}{x-4}$$

$$(x-4) = -\frac{8}{(y+1)}$$

$$x = 4 - \frac{8}{(y+1)}$$

$$x = \frac{4(y+1) - 8}{(y+1)}$$

$$x = \frac{4y + 4 - 8}{(y+1)}$$

$$x = \frac{4y-4}{y+1}$$

Por lo que resulta, haciendo un cambio en el nombre de la variable

$$f^{-1}(x) = \frac{4x-4}{x+1}$$

El dominio de f^{-1} es el conjunto $\mathbb{R} - \{-1\}$

Verificamos mediante el límite si la recta $x = -1$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x \to -1} \frac{4x-4}{x+1} = \infty$$

Por lo tanto, en $\boldsymbol{x = -1}$ **tenemos una asíntota vertical.**

Ejercicio 3 (2 puntos)

Hallar el conjunto de negatividad del polinomio Q de grado 3 que verifica

$$Q(-1) = Q(1) = Q(2) = 0$$

y que pasa por el punto $(0; -2)$

Respuesta

Primero debemos buscar la ecuación del polinomio $Q(x)$.

Dado que $Q(-1) = Q(1) = Q(2) = 0$, tenemos que las raíces del polinomio son $-1, 1$ y2.

Entonces,

$Q(x) = a \cdot (x+1)(x-1)(x-2)$

Reemplazamos las coordenadas del punto $(0; -2)$ para hallar el coeficiente a:

$$Q(0) = -2$$

$$a \cdot (0+1)(0-1)(0-2) = -2$$

$$a \cdot (1)(-1)(-2) = -2$$

$$a \cdot (2) = -2 \quad \Leftrightarrow \quad a = -1$$

Luego,

$Q(x) = -1\,(x+1)(x-1)(x-2)$

Para hallar el conjunto de negatividad del polinomio (aplicamos el teorema de Bolzano) debemos analizar el signo del polinomio en los intervalos determinados por los ceros. Es decir, debemos analizar el signo en los intervalos

$$(-\infty; -1)\,; (-1; 1); (1; 2); (2; +\infty)$$

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$Q(x)$	$Q(-2) > 0$	**0**	$Q(0) < 0$	**0**	$Q(1{,}5) > 0$	**0**	$Q(3) < 0$

Luego $\boldsymbol{C^-} = (\mathbf{-1}; \mathbf{1}) \cup (\mathbf{2}; +\infty)$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Sea P el punto medio del segmento determinado por los puntos $(4;2)$ y $(8;2)$

Hallar todos los puntos $Q=(N,N-2)$ de manera tal que la distancia entre los puntos P y Q sea igual a $\sqrt{26}$, es decir, $d(P;Q)=\sqrt{26}$

Respuesta

En primer lugar debemos buscar las coordenadas del punto medio del segmento determinado por los puntos $(4;2)$ y $(8;2)$

$$P=\left(\frac{4+8}{2};\frac{2+2}{2}\right)=(6;2)$$

Recordamos la definición de distancia entre los puntos $P=(x_1;y_1)$ y $Q=(x_2;y_2)$

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+\ (y_2-y_1)^2}=\sqrt{d(P;Q)}$$

$P=(6;2)$

$Q=(N,N-2)$

$$d(P;Q)=\sqrt{26}$$
$$\sqrt{(N-6)^2+\ (N-2-2)^2}=\sqrt{26}$$
$$\sqrt{(N-6)^2+\ (N-4)^2}=\sqrt{26}$$
$$\sqrt{N^2-12N+36+N^2-8N+16}=\sqrt{26}$$
$$\sqrt{2N^2-20N+52}=\sqrt{26}$$
$$2N^2-20N+52=26$$
$$2N^2-20N-26=0$$
$$N^2-10N-13=0$$

$$N_{1,2}=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot(1)\cdot(-13)}}{2\cdot1}=\frac{10\pm\sqrt{100-52}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{48}}{2}=5\pm\frac{\sqrt{48}}{2}=5\pm\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{4}}$$
$$=5\pm\sqrt{12}$$

$$\Rightarrow\quad N_1=5+\sqrt{12}\quad N_2=5-\sqrt{12}$$

Por lo tanto, los puntos buscados son

$\boldsymbol{Q_1=\left(5+\sqrt{12};3+\sqrt{12}\right)}\qquad \boldsymbol{Q_2=\left(5-\sqrt{12};3-\sqrt{12}\right)}$