TEMA 1

EJERCICIO 1 (2 puntos)

De la función $f(x) = \frac{-7x}{cx+d}$ se sabe que $Dom(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ y que $f(2) = -1$. Hallar $c, d \in \mathbb{R}$.

Respuesta

Como $Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ (y por el tipo de función) esto implica que en $x = -\frac{3}{2}$ se anula el denominador.

Es decir:

$$c \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-3c + 2d}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3c + 2d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{2}{3}d$$

Por otro lado, se sabe que $f(2) = -1$.

Esto significa que:

$$f(2) = \frac{-7 \cdot 2}{c \cdot 2 + d} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-14}{2c + d} = -1$$

Simplificamos un poco la ecuación:

$$-14 = -1 \cdot (2c + d)$$

$$-14 = -2c - d$$

$$d = -2c + 14$$

Dado que $c = \frac{2}{3}d$

$$d = -2\left(\frac{2}{3}d\right) + 14$$

$$d = -\frac{4}{3}d + 14$$

$$d + \frac{4}{3}d = 14$$

$$\frac{7}{3}d = 14 \quad \Leftrightarrow \quad d = 14 \cdot \frac{3}{7} \quad \Leftrightarrow \quad d = 6 \quad y\ por\ lo\ tanto\ \ c = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$$

Los valores pedidos son: $c = 4, d = 6$.

Ejercicio 2 (3 puntos)

Siendo

$$h(x) = \frac{1}{(f \circ g)(x)}$$

con $f(x) = 4x + 8$ y $g(x) = x^2 + 3x$, determinar analíticamente el dominio de $h(x)$ y las ecuaciones de las asíntotas verticales de $h(x)$

Respuesta

Para determinar el dominio de la función $h(x)$ debemos hallar su expresión general.

El denominador de la función es:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = 4 \cdot (x^2 + 3x) + 8 = 4x^2 + 12x + 8$$

Luego,

$$h(x) = \frac{1}{4x^2 + 12x + 8}$$

El dominio de la función serán todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ en donde NO se anula el denominador.

Vamos a hallar los valores de x para los cuales el denominador se anula. Para ello resolvemos la ecuación

$$4x^2 + 12x + 8 = 0$$

o bien (dividiendo la ecuación por 4)

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -2 \ \ y \ \ x_2 = -1$$

Entonces,

$$\boldsymbol{Dom(f)} = \mathbb{R} - \{\boldsymbol{-2; -1}\}$$

Para determinar las ecuaciones de las asíntotas verticales (en caso de que existan) debemos verificar si existe límite o no de la función cuando $x \to -2$ y cuando $x \to -1$.

$$\lim_{x \to -2} \frac{1}{4x^2 + 12x + 8} = \infty$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{x = -2}$ es la ecuación de una asíntota vertical.

$$\lim_{x \to -1} \frac{4x + 8}{4x^2 + 12x + 8} = \infty$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{x = -1}$ es la ecuación de una asíntota vertical.

Ejercicio 3 (3 puntos)

Dada la función $g(x) = \sqrt{3-2x}$, hallar el dominio de la función g y el valor de $g^{-1}(1)$

Respuesta

Para determinar el dominio de la función "g", partimos de la condición de que el argumento de la raíz cuadrada debe ser mayor o igual que cero:

$$3 - 2x \geq 0$$
$$-2x \geq -3$$
$$x \leq \frac{-3}{-2} \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{3}{2}$$

Por lo tanto**,**

$$\boldsymbol{Dom(g) = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]}$$

Para poder determinar $g^{-1}(1)$ primero hay que determinar la expresión de $g^{-1}(x)$ (que es la función inversa de $g(x)$)

Entonces planteamos:

$$y = \sqrt{3-2x}$$
$$y^2 = 3 - 2x$$
$$y^2 - 3 = -2x$$
$$\frac{y^2-3}{-2} = x$$

Luego hacemos el cambio de variables:

$$y = \frac{x^2-3}{-2} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$$

Por lo tanto,

$$g^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$$

Ahora determinamos $g^{-1}(1)$:

$$g^{-1}(1) = -\frac{1}{2}(1)^2 + \frac{3}{2} = 1$$

Ejercicio 4 (2 puntos)

El punto $Q = (3; 2)$ pertenece a la recta determinada por la función $g(x) = \frac{4}{3}x + b$

Escribir el siguiente conjunto como intervalo o unión de intervalos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 3g(x) \leq 7\}$$

Respuesta

Primero debemos hallar el valor de la constante "b". Para esto, tenemos como dato que el punto $Q = (3; 2)$ pertenece a la recta determinada por la función, entonces:

$g(3) = 2$

$g(3) = \frac{4}{3} \cdot 3 + b$

Hallamos el valor de "b":

$$\frac{4}{3} \cdot 3 + b = 2$$

$$4 + b = 2$$

$$b = -2$$

Por lo tanto,

$g(x) = \frac{4}{3}x - 2$

Luego, escribimos la expresión $3g(x) \leq 7$ y resolvemos la inecuación

$3 \cdot \left(\frac{4}{3}x - 2\right) \leq 7$

$$4x - 6 \leq 7$$

$$4x \leq 13 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \leq \frac{13}{4}$$

Por lo tanto,

$\boldsymbol{A = \left(-\infty; \frac{13}{4}\right]}$