MATEMÁTICA – SEGUNDO PARCIAL

CLAVE DE CORRECCIÓN

PRIMER TURNO – TEMA 3

21/11/2018

Ejercicio 1 (2 puntos)

Determinar los valores de abscisa $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función

$$f(x) = e^{-x^2+4x+5}$$

es positiva.

Resolución:

La función $\boldsymbol{f}$ está definida en el conjunto de los números reales.

Para hallar el conjunto donde la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $\boldsymbol{f}$ es positiva debemos hallar el conjunto donde la derivada primera es positiva $f'(x) > 0$.

La derivada primera de la función es

$$f'(x) = (-2x+4)e^{-x^2+4x+5}$$

Al igual que la función, la derivada primera está definida en el conjunto de los números reales.

Teniendo en cuenta que $e^{-x^2+4x+5} > 0$,

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x+4 > 0 \Leftrightarrow -2x > -4 \Leftrightarrow x < 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 2)$$

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $\boldsymbol{f}$ es positiva para $x \in (-\infty; 2)$.

Ejercicio 2 (3 puntos)
Determinar, si existen, las abscisas de los extremos locales de la función

$$f: (-2; 1) \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \ln(-x^2 - x + 2)$$

Justificar la respuesta.

Resolución:

La función ***f*** está definida en el intervalo $(-2; 1)$.

Para hallar (en caso de existir) las abscisas de los extremos locales de la función debemos analizar la derivada de ***f***.

Aplicando las reglas de derivación conocidas llegamos a

$$f'(x) = \frac{-2x - 1}{-x^2 - x + 2}$$

La derivada primera no está definida si el denominador se anula. Esto ocurre si $x = -2$ y $x = 1$, con lo cual la derivada primera está bien definida en el intervalo $(-2; 1)$.

Observamos que la derivada se anula si y sólo si

$$-2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$

Como la función derivada está definida en el intervalo $(-2; 1)$, analizamos el signo de f' en los intervalos determinados por el dominio de la función y el cero de f'

$$\left(-2; -\frac{1}{2}\right) \quad ; \quad \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$$

Analizamos el signo de la derivada primera en cada uno de los intervalos:

x	$-1 \in \left(-2; -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$0 \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$
$f'(x)$	$f'(-1) > 0$	0	$f'(0) < 0$

Observamos la tabla y vemos que la derivada primera es positiva en el intervalo $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$ y negativa en el intervalo $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$; por la tanto en el punto de abscisa $x = -\frac{1}{2}$ la función tiene un máximo relativo.

Ejercicio 3 (2 puntos)

Hallar el valor de la constante $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$ para que la recta de ecuación $x = -\frac{1}{2}$ sea asíntota vertical de la función $f(x) = \frac{4x-5}{\boldsymbol{k}x+3}$

Para el valor de $\boldsymbol{k}$ hallado obtener, si existe, la ecuación de la asíntota horizontal de $\boldsymbol{f}$.

Justificar la respuesta, en ambos casos, a partir del cálculo de límites.

Resolución:

Si la recta de ecuación $x = -\frac{1}{2}$ es una asíntota vertical de la función, entonces

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{4x-5}{\boldsymbol{k}x+3} = \infty$$

Para que esto ocurra, cuando $x \to -\frac{1}{2}$, el denominador debe tender a cero y el numerador a un número no nulo (en este caso tiende a -7). Por lo tanto, debe ocurrir que, $kx + 3 = 0$ cuando $x = -\frac{1}{2}$

Entonces

$$k \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = -3 \cdot (-2) \quad \Rightarrow \quad k = 6$$

La función es

$$f(x) = \frac{4x-5}{\boldsymbol{6x+3}}$$

Para hallar la asíntota horizontal planteamos el límite $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x-5}{\boldsymbol{6x+3}}$

Entonces,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x\left(4 - \frac{5}{x}\right)}{x\left(6 + \frac{3}{x}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{4 - \frac{5}{x}}{6 + \frac{3}{x}} = \frac{2}{3}$$

dado que los cocientes $\frac{5}{x}$ y $\frac{3}{x}$ tienden a cero cuando x tiende a infinito.

Por lo tanto existe asíntota horizontal y su ecuación es $\boldsymbol{y = \frac{2}{3}}$

Ejercicio 4 (3 puntos)
Hallar f sabiendo que

$$f'(x) = \frac{4x+4}{x^2+2x+1} \qquad y \qquad f(0) = 3$$

Resolución:

Para hallar la expresión de la función f debemos hallar la integral indefinida de $\boldsymbol{f'}$.

$$\int \frac{4x+4}{x^2+2x+1} dx$$

Podemos calcular la integral utilizando el método de sustitución:

$$u = x^2 + 2x + 1$$

$$du = (2x+2)\, dx$$

$$2du = (4x+4)dx$$

$$\int \frac{4x+4}{x^2+2x+1} dx = \int \frac{2du}{u} = 2\ln(u) + C = 2\ln(x^2+2x+1) + C$$

Para hallar el valor de la constante C aplicamos la condición $f(0) = 3$.

$$2ln(0^2 + 2(0) + 1) + C = 3$$

$$2ln(1) + C = 3$$

$$C = 3$$

Por lo tanto:
$f(x) = 2ln(x^2 + 2x + 1) + 3$

<u>**Otra forma de resolución**</u>

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

Entonces

$$\frac{4x+4}{x^2+2x+1} = \frac{4(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{4}{x+1} \quad \rightarrow \quad \int \frac{4x+4}{x^2+2x+1} dx = \int \frac{1}{x+1} dx = 4\int \frac{1}{x+1} dx$$

Continuamos con el cálculo de la integral utilizando el método de sustitución

$u = x + 1$

$du = dx$

$4\int \frac{1}{x+1} dx = 4\int \frac{1}{u} du = 4\ln(u) + C = 4\ln(x+1) + C$

El cálculo de la constante se sigue como en la resolución anterior.

Notar que:

$$4\ln(x+1) = 2 \cdot 2 \cdot \ln(x+1) = 2\ln(x+1)^2 = 2\ln(x^2 + 2x + 1)$$