TEMA 3

Ejercicio 1 (2 puntos)

Dada la función

$$f(x) = \frac{10}{\sqrt{1+2x}}$$

hallar la expresión y el dominio de su **función inversa f^{-1}**

Respuesta

Hallamos la función inversa de f

$$y = \frac{10}{\sqrt{1+2x}}$$

$$\sqrt{1+2x} = \frac{10}{y}$$

$$\left(\sqrt{1+2x}\right)^2 = \left(\frac{10}{y}\right)^2$$

$$1+2x = \frac{100}{y^2}$$

$$2x = \frac{100}{y^2} - 1$$

$$x = \frac{50}{y^2} - \frac{1}{2}$$

Haciendo un cambio en el nombre de la variable, la función inversa es

$$f^{-1}(x) = \frac{50}{x^2} - \frac{1}{2}$$

El dominio de la función inversa coincide con la imagen de la función f.

Dado que $\sqrt{t} > 0$ para todo $t > 0$ tenemos que

$$\frac{10}{\sqrt{1+2x}} > 0$$

Por lo tanto, el dominio de la función inversa es

$$\boldsymbol{Dominio}\left(\boldsymbol{f^{-1}}\right) = (\mathbf{0}; +\infty)$$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Hallar analíticamente el conjunto $C \cap B$ si se sabe que $C = \{x \in \mathbb{R} : |4x - 27| > 1\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} : x(x-3) < 0\}$

Respuesta

Primero vamos a hallar analíticamente cuales son los valores de x que pertenecen al conjunto C.

Tenemos que $C = \{x \in \mathbb{R} : |4x - 27| > 1\}$, entonces

$$|4x-27| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4x - 27 > 1 \text{ ó } 4x - 27 < -1 \quad \Leftrightarrow \quad 4x > 28 \text{ ó } 4x < 26$$

$$\Leftrightarrow \quad x > 7 \text{ ó } x < \frac{13}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in (7; +\infty) \text{ ó } x \in \left(-\infty; \frac{13}{2}\right)$$

Entonces,

$$C = \left(-\infty; \frac{13}{2}\right) \cup (7; +\infty)$$

Ahora vamos a hallar cuales son los valores de x que pertenecen al conjunto B:

$B = \{x \in \mathbb{R} : x(x-3) < 0\}$

$x(x-3) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0 \wedge (x-3) > 0 \quad$ ó $\quad x > 0 \wedge (x-3) < 0$

$x < 0 \wedge (x-3) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0 \wedge x > 3$ en este caso la intersección es vacía

$x > 0 \wedge (x-3) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0 \wedge x < 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (0; 3)$

Entonces $B = (0; 3)$

Ahora debemos hallar el conjunto $C \cap B$

$$C \cap B = \left[\left(-\infty; \frac{13}{2}\right) \cup (7; +\infty)\right] \cap (0; 3) = (0; 3)$$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Sea h la función lineal que verifica $h(2) = 0$ y la gráfica de la función pasa por el punto $(0; 5)$. Decidir si el punto $x = -3$ pertenece al conjunto M siendo

$$M = \{x \in \mathbb{R} : 4 - h(x) \leq 0\}$$

Respuesta

Primero debemos hallar la función lineal h.

Tenemos que:

$$h(x) = mx + b$$

Como $h(2) = 0$

$$0 = 2m + b \qquad \Longrightarrow \qquad m = -\frac{b}{2}$$

Por otro lado, la gráfica de la función pasa por el punto $(0; 5)$

$$5 = 0 \cdot m + b \qquad \Rightarrow \quad b = 5 \qquad y\ por\ lo\ tanto \qquad m = -\frac{5}{2}$$

Entonces nos queda que

$$h(x) = -\frac{5}{2}x + 5$$

Para ver si $x = -3$ pertenece al conjunto M debemos ver si $4 - h(-3) \leq 0$

$$4 - h(-3) = 4 - \left(-\frac{5}{2} \cdot -3 + 5\right) = 4 - \frac{15}{2} - 5 = -\frac{17}{2} < 0$$

La desigualdad se verifica. Entonces, $x = -3$ pertenece al conjunto M.

Ejercicio 4 (3 puntos)

Dado el polinomio $P(x) = (x^2 - ax - 30)(x^2 - 1)$, hallar el valor de la constante $a \in \mathbb{R}$ si se sabe que el polinomio tiene una raíz en $x = 2$

Hallar el conjunto de positividad del polinomio.

Respuesta

Dado que $x = 2$ es raíz del polinomio $P(x)$ se verifica que $P(2) = 0$

$$(2^2 - a \cdot 2 - 30) \cdot (2^2 - 1) = 0$$
$$(-26 - 2a) \cdot (3) = 0$$
$$-26 - 2a = 0$$
$$a = -13$$

Entonces,

$$P(x) = (x^2 + 13x - 30)(x^2 - 1)$$

Las raíces de la cuadrática $x^2 + 13x - 30$ son

$$x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-30)}}{2 \cdot (1)} = \frac{-13 \pm \sqrt{289}}{2 \cdot (1)} = \frac{-13 \pm 17}{2} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 2 \quad x_2 = -15$$

Y por lo tanto podemos decir que

$$x^2 + 13x - 30 = (x - 2)(x + 15)$$

Por otro lado, aplicando diferencia de cuadrados tenemos que:

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

Por lo tanto, el polinomio factorizado es

$$P(x) = (x - 2)(x + 15)(x - 1)(x + 1)$$

Aplicando el Teorema de Bolzano y reemplazando por algún valor, analizamos el conjunto de negatividad.

Los posibles intervalos son:

$$(-\infty; -15), (-15; -1), (-1; 1), (1; 2), (2; +\infty)$$

Por ejemplo, en $x = -16$ el polinomio alcanza un valor positivo. Considerando que el polinomio tiene raíces simples se deduce:

$$\boldsymbol{C^+} = (-\infty; -\mathbf{15}) \cup (-\mathbf{1}; \mathbf{1}) \cup (\mathbf{2}; +\infty)$$