TEMA 2

Ejercicio 1 (2 puntos)

Dada la función

$$f(x) = 4 \cdot \sqrt{3x - \frac{1}{16}}$$

hallar el dominio e imagen de su **función inversa**

Respuesta

Hallamos la función inversa de f(x):

$$y = 4\sqrt{3x - \frac{1}{16}}$$

$$\frac{1}{4}y = \sqrt{3x - \frac{1}{16}}$$

$$\left(\frac{1}{4}y\right)^2 = \left(\sqrt{3x - \frac{1}{16}}\right)^2$$

$$\frac{y^2}{16} = 3x - \frac{1}{16}$$

$$\frac{y^2}{16} + \frac{1}{16} = 3x$$

$$\frac{y^2}{48} + \frac{1}{48} = x$$

Haciendo un cambio en el nombre de la variable, la función inversa es

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{48}x^2 + \frac{1}{48}$$

El dominio de la función inversa coincide con la imagen de la función f.

Dado que $\sqrt{t} \geq 0$ para todo $t \geq 0$ tenemos que

$$\sqrt{3x - \frac{1}{16}} \geq 0 \quad \therefore \quad f(x) = 4\sqrt{3x - \frac{1}{16}} \geq 0$$

Por lo tanto, el dominio de la función inversa es

$$\boldsymbol{Dominio}(\boldsymbol{f^{-1}}) = [\mathbf{0}; +\infty)$$

La gráfica correspondiente a la función $\boldsymbol{f^{-1}}$ es una parábola.

Para determinar la imagen de la función inversa podemos calcular el vértice de dicha parábola:

$V = \left(0; \frac{1}{48}\right)$

Como el coeficiente principal es positivo, por lo tanto, la parábola es cóncava hacia arriba.

$$\boldsymbol{Imagen}(\boldsymbol{f^{-1}}) = \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{48}}; +\infty\right)$$

Otra manera de encontrar el conjunto imagen:

Para todo x en el dominio de la función inversa se verifica que

$\frac{1}{48}x^2 \geq 0$

entonces

$\frac{1}{48}x^2 + \frac{1}{48} \geq \frac{1}{48}$

Y por lo tanto

$f^{-1}(x) \geq \frac{1}{48}$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Hallar analíticamente el conjunto $M \cup N$ si se sabe que

$M = \{x \in \mathbb{R} \; : \; (x-3)^2 - 5 \leq 20\}$

$N = \{x \in \mathbb{R} \; : \; 18 - 5x \leq 3x + 2\}$

Respuesta

Primero vamos a hallar analíticamente cuales son los valores de x que pertenecen al conjunto M.

Tenemos que

$M = \{x \in \mathbb{R} \; : \; (x-3)^2 - 5 \leq 20\}$

$(x-3)^2 - 5 \leq 20$

$(x-3)^2 \leq 25$

$|x-3| \leq \sqrt{25}$

$$|x-3| \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad -5 \leq x-3 \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq x \leq 8$$

Entonces,

$M = [-2; 8]$

Ahora vamos a hallar cuales son los valores de x que pertenecen al conjunto N.

$N = \{x \in \mathbb{R} : \ 18 - 5x \leq 3x + 2\}$

$18 - 5x \leq 3x + 2$

$-5x - 3x \leq 2 - 18$

$-8x \leq -16 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 2$

$N = [2; \ +\infty)$

Ahora debemos hallar el conjunto $M \cup N$:

$$M \cup N = [-2; 8] \cup [2; \ +\infty) = [-2; +\infty)$$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Sea $B = \{x \in R \ : \ \ g(x) + 3 > 0\}$. Sea g la función lineal que verifica $g(-2) = 0$ y cuya gráfica pasa por el punto $(-4; 6)$. Decidir si $x = 2$ pertenece al conjunto B.

Justificar la respuesta.

Respuesta

Primero debemos hallar la función lineal g.

Tenemos que:

$g(x) = mx + b$

Como $g(-2) = 0$

$0 = -2m + b \quad \Longrightarrow \quad b = 2m$

Por otro lado la gráfica de la función pasa por el punto $(-4; 6)$

$6 = -4m + b$

y como $b = 2m$

$6 = -4m + (2m) \quad \Longrightarrow \quad 6 = -2m \quad \Longrightarrow \ m = -3 \quad y \quad b = 2(-3) = -6$

Entonces nos queda que

$g(x) = -3x - 6$

Para ver si $x = 2$ pertenece al conjunto B debemos ver si $(g(2) + 3) > 0$

$$g(2) + 3 = (-3 \cdot 2 - 6) + 3 = -12 + 3 = -9 \ngtr 0$$

Como no se cumple la desigualdad, $x = 2$ no pertenece al conjunto B

Ejercicio 4 (3 puntos)

Hallar el conjunto de negatividad del polinomio $Q(x) = (-x^2 + x + 6)(x^2 - k)$ si se sabe que $x = 1$ es raíz del polinomio.

Respuesta

Dado que $x = 1$ es raíz del polinomio $Q(x)$ se verifica que $Q(1) = 0$

$$[-1^2 + 1 + 6] \cdot [(1)^2 - k] = 0$$
$$6 \cdot [1 - k] = 0$$
$$1 - k = 0$$
$$k = 1$$

Entonces,

$Q(x) = (-x^2 + x + 6)(x^2 - 1)$

Las raíces de la cuadrática $-x^2 + x + 6$ son

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (6)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm 5}{-2} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 3 \quad x_2 = -2$$

Y por lo tanto podemos decir que

$$-x^2 + x + 6 = -(x - 3)(x + 2)$$

Por otro lado, aplicando diferencia de cuadrados tenemos que:

$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

Por lo tanto, el polinomio factorizado es

$P(x) = -(x - 3)(x + 2)(x - 1)(x + 1)$

Aplicando el Teorema de Bolzano y reemplazando por algún valor, analizamos el conjunto de negatividad.

Los posibles intervalos son:

$$(-\infty; -2), (-2; -1), (-1; 1), (1; 3), (3; +\infty)$$

Por ejemplo, en $x = -3$ el polinomio alcanza un valor negativo. Considerando que el polinomio tiene raíces simples se deduce:

$$\boldsymbol{C^-} = (-\infty; \mathbf{-2}) \cup (\mathbf{-1}; \mathbf{1}) \cup (\mathbf{3}; +\infty)$$

En este caso para decidir cuáles son intervalos de negatividad se usa el hecho de que al ser raíces simples los intervalos de negatividad se intercalan con los de positividad.

Otra manera de decir cuáles son los intervalos de negatividad es evaluar el polinomio en un punto en cada uno de los intervalos posibles y quedarse con aquellos en donde el signo del polinomio es negativo