Ejercicio 1

Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=\dfrac{2x^2+x}{\sqrt{x+2}}$ en $x_0=2$

Solución y comentarios

Forma 1 de resolución

La ecuación de la recta tangente en $x_0 = 2$ (expresada en forma canónica) es:

$$r(x) = f'(2)(x-2) + f(2)$$

Calculamos la derivada de la función f:

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2+x}{\sqrt{x+2}}\right)' = \frac{(2x^2+x)'\left(\sqrt{x+2}\right) - \left(\sqrt{x+2}\right)'(2x^2+x)}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2} =$$

$$= \frac{(4x+1)\left(\sqrt{x+2}\right) - \left(\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\right)(2x^2+x)}{x+2} = \frac{(4x+1)\left(\sqrt{x+2}\right) - \left(\frac{2x^2+x}{2\sqrt{x+2}}\right)}{x+2} =$$

$$= \frac{2(4x+1)\left(\sqrt{x+2}\right)^2 - (2x^2+x)}{(x+2)\left(2\sqrt{x+2}\right)} = \frac{(8x+2)(x+2) - 2x^2 - x}{(x+2)\left(2\sqrt{x+2}\right)} =$$

$$= \frac{8x^2+16x+2x+4-2x^2-x}{(x+2)\left(2\sqrt{x+2}\right)} = \frac{6x^2+17x+4}{(x+2)\left(2\sqrt{x+2}\right)}$$

Evaluamos la derivada de la función en $x_0 = 2$

$$f'(2) = \frac{6\cdot 2^2 + 17\cdot 2 + 4}{(2+2)\left(2\sqrt{2+2}\right)} = \frac{62}{16} = \frac{31}{8}$$

Calculamos la función en $x_0 = 2$

$$f(2) = \frac{2\cdot 2^2 + 2}{\sqrt{2+2}} = 5$$

Entonces, la ecuación de la recta tangente (en forma canónica) es:

$$\boldsymbol{r(x) = \frac{31}{8}(x-2) + 5}$$

Forma 2 de resolución

La ecuación de la recta tangente en $x_0 = 2$ (expresada en forma explícita) es:

$$r(x) = f'(2) \cdot x + b$$

Calculamos la derivada de la función f:

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2 + x}{\sqrt{x+2}}\right)' = \frac{(2x^2+x)'\left(\sqrt{x+2}\right) - \left(\sqrt{x+2}\right)'(2x^2+x)}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2} =$$

$$= \frac{(4x+1)\left(\sqrt{x+2}\right) - \left(\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\right)(2x^2+x)}{x+2} = \frac{(4x+1)\left(\sqrt{x+2}\right) - \left(\frac{2x^2+x}{2\sqrt{x+2}}\right)}{x+2} =$$

$$= \frac{2(4x+1)\left(\sqrt{x+2}\right)^2 - (2x^2+x)}{(x+2)\left(2\sqrt{x+2}\right)} = \frac{(8x+2)(x+2) - 2x^2 - x}{(x+2)\left(2\sqrt{x+2}\right)} =$$

$$= \frac{8x^2 + 16x + 2x + 4 - 2x^2 - x}{(x+2)\left(2\sqrt{x+2}\right)} = \frac{6x^2 + 17x + 4}{(x+2)\left(2\sqrt{x+2}\right)}$$

Evaluamos la derivada de la función en $x_0 = 2$

$$f'(2) = \frac{6 \cdot 2^2 + 17 \cdot 2 + 4}{(2+2)\left(2\sqrt{2+2}\right)} = \frac{62}{16} = \frac{31}{8}$$

Entonces,

$$r(x) = \frac{31}{8} \cdot x + b$$

Falta calcular el valor de la ordenada. Para esto usamos el hecho de que cuando $x_0 = 2$

$$r(2) = f(2)$$

Calculamos la función en $x_0 = 2$

$$f(2) = \frac{2 \cdot 2^2 + 2}{\sqrt{2+2}} = 5$$

Por otro lado,

$$r(2) = \frac{31}{8} \cdot 2 + b$$

$$r(2) = \frac{31}{8} + b$$

Entonces

$$5 = \frac{31}{4} + b \quad \Leftrightarrow \quad b = -\frac{11}{4}$$

La ecuación de la recta tangente (expresada en forma explícita) es:

$$\boldsymbol{r(x) = \frac{31}{8} \cdot x - \frac{11}{4}}$$

Ejercicio 2

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de la función

$f(x) = (x-2)^2(x+1)$

Solución y comentarios

Primero calculamos el dominio de la función. En este caso el dominio es el conjunto de todos los números reales.

Ahora vamos a calcular la derivada primera y su dominio.

$$f'(x) = [(x-2)^2 \cdot (x+1)]' = ((x-2)^2)'(x+1) + (x+1)'(x-2)^2 =$$
$$= 2(x-2)(x+1) + (x-2)^2 = (x-2)[2(x+1) + (x-2)] =$$
$$= (x-2) \cdot 3x$$

Al igual que la función, el dominio de la derivada primera es el conjunto de todos los números reales.

Igualamos a cero la derivada primera para hallar los puntos críticos (candidatos a máximos y/o mínimos de la función):

$$f'(x) = 0 \iff (x-2)(3x) = 0 \quad (x-2) = 0 \ \lor \ 3x = 0 \iff \boldsymbol{x = 2} \ \lor \ \boldsymbol{x = 0}$$

Vamos a analizar el signo de la derivada primera en los intervalos $(-\infty; 0); (0; 2); (2; +\infty)$

- $(-\infty; 0)$

  $-1 \in (-\infty; 0)$ y $f'(-1) = (-1-2) \cdot 3(-1) = 9 > 0$

  En el intervalo $(-\infty; 0)$ la derivada primera es siempre positiva, y por lo tanto la función es creciente.
- $(0; 2)$

  $1 \in (0; 2)$ y $f'(1) = (1-2) \cdot 3(1) = -3 < 0$

  En el intervalo $(0; 2)$ la derivada primera es siempre negativa, y por lo tanto la función es decreciente.
- $(2; +\infty)$

  $3 \in (2; +\infty)$ y $f'(3) = (3-2) \cdot 3(3) = 9 > 0$
- En el intervalo $(2; +\infty)$ la derivada primera es siempre positiva, y por lo tanto la función es creciente.

Entonces,

$$Intervalos\ de\ crecimiento = (-\infty; 0); (2; +\infty)$$
$$Intervalo\ de\ decrecimiento = (0; 2)$$

Como la función es creciente en el intervalo $(-\infty; 0)$ y decreciente en el intervalo $(0; 2)$ tiene un máximo local en el punto $Max = (0; f(0)) = (0; 4)$.

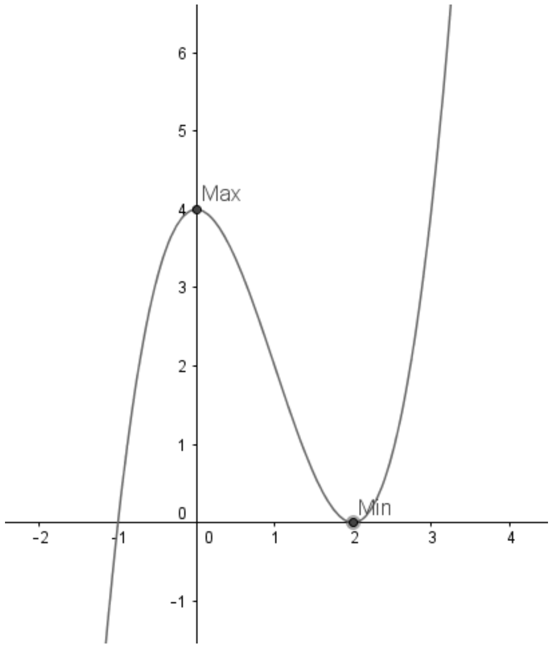
Como la función es decreciente en el intervalo $(0; 2)$ y creciente en el intervalo $(2; +\infty)$ tiene un mínimo local en el punto $Min = (2; f(2)) = (2; 0)$

También se puede utilizar el criterio de la derivada segunda para concluir que los puntos

$$Max = (0; f(0)) = (0; 4) \text{ y } Min = (2; f(2)) = (2; 0)$$

son, respectivamente, máximo y mínimos de la función. Se debe verificar que $f''(0) < 0$ y $f''(2) > 0$.

El gráfico de la función es:



Ejercicio 3

Para la siguiente función $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad x\leq 0 \\ -x+2 & si \quad x>0 \end{cases}$

determinar los ceros, el conjunto de positividad, el conjunto de negatividad y la imagen de la función. Graficarla.

Solución y comentarios

El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales.

Comenzamos determinando los ceros de la función:

- Para los valores $x \leq 0$ la función se anula si y solo si

  $x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x = -1}$

  La solución $x = 1$ no se tiene en cuenta ya que la función está definida como $x^2 - 1$ solo para valores $x \leq 0$.

- Para los valores de $x > 0$ la función se anula si y solo si

  $-x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x = 2}$

Entonces:

$$Conjunto\ de\ ceros\ de\ la\ función = C^0 = \{-1; 2\}$$

Para analizar los conjuntos de positividad y negatividad debemos ver el signo de la función entre los valores que la anulan y/o la definen. Es decir, debemos analizar el signo de la función en los intervalos:

$$\boldsymbol{(-\infty; -1); (-1; 0]; (0; 2); (2; +\infty)}$$

- $(-\infty; -1)$

  $-2 \in (-\infty; -1)$ y $f(-2) = (-2)^2 - 1 = 3 > 0$

  En el intervalo $(-\infty; -1)$ la función es positiva.

- $(-1; 0]$

  $-0.5 \in (-1; 0]$ y $f(-0.5) = (-0.5)^2 - 1 = -0.75 < 0$

  En el intervalo $(-1; 0]$ la función es negativa.

- $(0; 2)$

  $1 \in (0; 2)$ y $f(1) = -1 + 2 = 1 > 0$

  En el intervalo $(0; 2)$ la función es positiva.

- $(2; +\infty)$

  $3 \in (2; +\infty)$ y $f(3) = -3 + 2 = -1 < 0$

  En el intervalo $(2; +\infty)$ la función es negativa.

Entonces:

$$Conjunto\ de\ positividad\ de\ la\ función = C^+ = (-\infty; -1) \cup (0; 2)$$

$$Conjunto\ de\ negatividad\ de\ la\ función = C^- = (-1; 0] \cup (2; +\infty)$$

Para el cálculo del conjunto Imagen tenemos que:

- $si\ x \leq 0$ la función es parte de una parábola. Como $x^2 \geq 0,\ f(x) = x^2 - 1 \geq -1$.

  Para estos valores de x tenemos que $f(x) \geq -1$

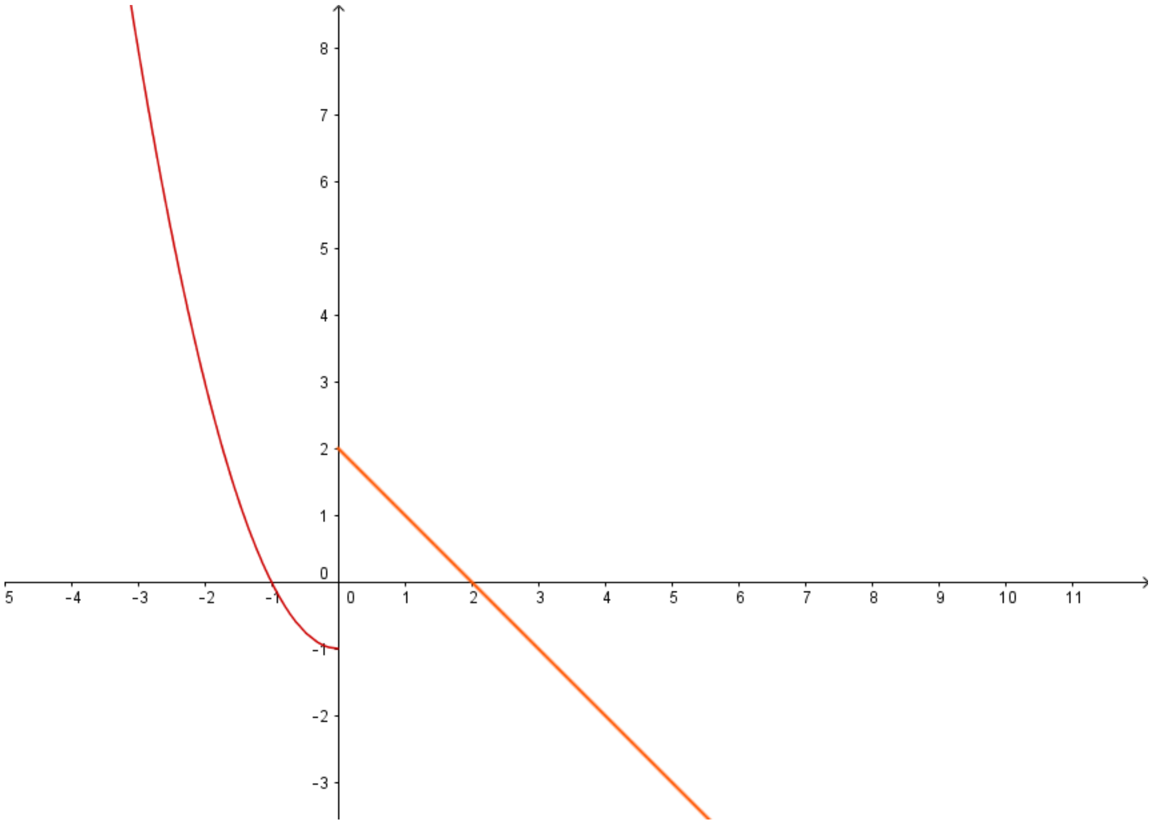
  Si $x\ \leq 0,\ Imagen(f) = [-1; +\infty)$
- $si\ x > 0$ la función es parte de una recta, entonces

  $x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x + 2 < 2 \quad \Rightarrow \quad f(x) < 2$

  Si $x > 0,\ Imagen(f) = (-\infty; 2)$

Entonces,

$$Imagen(f) = [-1; +\infty) \cup (-\infty; 2) = R$$



Ejercicio 4

Calcular el valor de ***k*** para que $\int_0^2 (kx^2 + x)dx = 5$

Solución y comentarios

Primero calculamos la integral del enunciado:

$$\int_0^2 (kx^2 + x)dx = \left(k\ \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) |_0^2 = \left(k\ \frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2}\right) - \left(k\ \frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2}\right) = k\ \frac{8}{3} + 2$$

Como el valor del a integral debe ser 5, planteamos

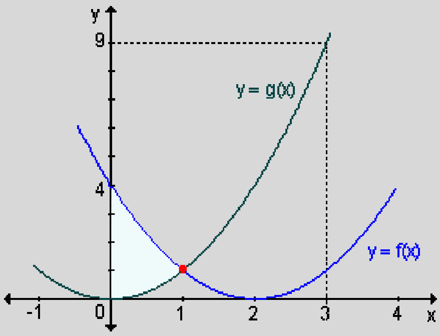
$$k\ \frac{8}{3} + 2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad k\ \frac{8}{3} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad k\ = \frac{9}{8}$$

El valor buscado es

$$k = \frac{9}{8}$$

Ejercicio 5

Dada la siguiente gráfica



hallar las ecuaciones de las curvas y el área de la zona sombreada.

Solución y comentarios

Las curvas del gráfico son parábolas.

La función f es una parábola que tiene vértice en el punto

$V_f = (2;0)$

entonces,

$f(x) = a(x-2)^2 + 0$

como pasa por el punto $P = (1;1)$

$1 = f(1) = a(1-2)^2 + 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = a$

finalmente se tiene que:

$\boldsymbol{f(x) = (x-2)^2}$

La función g es una parábola que tiene vértice en el punto

$V_g = (0;0)$

entonces,

$g(x) = b(x-0)^2 + 0$

como pasa por el punto $P = (1;1)$

$1 = g(1) = b + 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = b$

finalmente se tiene que:

$\boldsymbol{g(x) = x^2}$

Para calcular el área sombreada planteamos:

$$Área = \int_0^1 (x-2)^2 - (x^2)dx = \int_0^1 (x^2 - 4x + 4 - x^2)dx = \int_0^1 (-4x+4)dx$$

$$= \left(-\frac{4x^2}{2} + 4x\right)\Big|_0^1 = -\frac{4}{2} + 4 = 2$$

El área de la región es igual a 2.