



TEMA 1

Ejercicio 1 (2 puntos)

Hallar los conjuntos de positividad y negatividad de la función

$$g(x) = 1 + \frac{4 + 2x}{1 - 2x}$$

Respuesta

Primero vamos a reescribir la función g .

$$g(x) = 1 + \frac{4 + 2x}{1 - 2x} = \frac{1 - 2x + 4 + 2x}{1 - 2x} = \frac{5}{1 - 2x}$$

Planteamos (para hallar el conjunto de positividad)

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{5}{1 - 2x} > 0$$

Como el numerador es un número positivo, el cociente es positivo sí y solo sí el denominador es positivo:

$$1 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$$

Para hallar el conjunto de negatividad planteamos

$$g(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{5}{1 - 2x} < 0$$

Como el numerador es un número positivo, el cociente es negativo si y solo si el denominador es negativo:

$$1 - 2x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

Luego, los conjuntos pedidos son:

$$\text{Conjunto de negatividad: } C^- = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

$$\text{Conjunto de positividad: } C^+ = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$$



Ejercicio 2 (3 puntos)

Determinar mediante el uso de límite si las rectas de ecuación $y = -2$, $x = 1$ son asíntotas de la función

$h(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$ siendo

$$f(x) = \frac{-2x + 2}{x} \quad g(x) = x - \frac{1}{2}$$

Respuesta

Primero hallamos la expresión de la función h

$$h(x) = f(g(x)) = f\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{-2\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2}{x - \frac{1}{2}} = \frac{-2x + 1 + 2}{x - \frac{1}{2}} = \frac{-2x + 3}{x - \frac{1}{2}}$$

$$h(x) = \frac{-2x + 3}{x - \frac{1}{2}}$$

La recta de ecuación $y = -2$ es asíntota horizontal si el límite de la función cuando x tiende a infinito vale -2 .

Calculamos el límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x + 3}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-2x}{x} + \frac{3}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{2x}} = -2$$

Como el límite vale -2 , la recta ecuación $y = -2$ es una asíntota horizontal.

La recta de ecuación $x = 1$ es asíntota vertical si el límite de la función cuando x tiende 1 es infinito.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x + 3}{x - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Como el límite es finito **no hay asíntota vertical en $x = 1$**



Ejercicio 3 (2 puntos)

Hallar un posible valor de la constante $b \in \mathbb{R}$ para que el conjunto

$$\left\{x \in \mathbb{R} : \left| \frac{2}{3}x - 1 \right| \leq b\right\}$$

se encuentre contenido en el intervalo $(-\infty; 3)$

Respuesta

Resolvemos la inecuación.

Si la constante b es negativa el conjunto es vacío.

Pedimos que $b \geq 0$

$$\left| \frac{2}{3}x - 1 \right| \leq b \Leftrightarrow -b \leq \frac{2}{3}x - 1 \leq b \Leftrightarrow -b + 1 \leq \frac{2}{3}x \leq b + 1$$

$$\frac{3}{2}(-b + 1) \leq x \leq \frac{3}{2}(b + 1)$$

Entonces

$$\left\{x \in \mathbb{R} : \left| \frac{2}{3}x - 1 \right| \leq b\right\} = \left[\frac{3}{2}(-b + 1); \frac{3}{2}(b + 1) \right]$$

Para que el conjunto esté contenido en el intervalo $(-\infty; 3)$ debemos pedir que

$$\frac{3}{2}(b + 1) < 3 \Leftrightarrow b < 1$$

Entonces, la constante buscada debe cumplir simultáneamente las condiciones

$$b \geq 0 ; b < 1$$

es decir, $b \in [0; 1)$

Un valor posible es $b = \frac{1}{3}$



Ejercicio 4 (3 puntos)

Sean P y Q los puntos donde se cruzan las gráficas de las funciones

$$g(x) = (x - 1) \cdot (x + 1)$$

$$h(x) = -x^2 + 4x + 5$$

Calcular la distancia entre los puntos P y Q .

Respuesta

Hallamos los puntos de intersección entre las gráficas de las funciones g y h .

Primero hallamos las abscisas de los puntos de intersección

$$g(x) = h(x)$$

$$(x - 1) \cdot (x + 1) = -x^2 + 4x + 5$$

$$x^2 - 1 + x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$2x^2 - 4x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 3$$

$$P = (-1; g(-1)) = (-1; 0)$$

$$Q = (3; g(3)) = (3; 8)$$

$$d(P, Q) = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (8 - 0)^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80}$$