TEMA 2

Ejercicio 1 (2 puntos)

Determinar analíticamente el valor de la constante $b \in \mathbb{R}$ para que el conjunto solución de la inecuación $|3x - b| \leq 2$ sea igual al intervalo $\left[\frac{5}{3}; 3\right]$

Respuesta

Los extremos del intervalo del conjunto solución deben cumplir con las igualdades

$$\left|3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right) - b\right| = 2 \quad y \quad |3 \cdot 3 - b| = 2$$

Busquemos el valor de $b \in \mathbb{R}$ que verifique ambas condiciones.

Primero resolvemos la ecuación

$$\left|3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right) - b\right| = 2$$

$|5 - b| = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 5 - b = 2 \quad$ ó $\quad 5 - b = -2$

$-b = -3 \quad$ ó $\quad -b = -7$

$b = 3 \quad$ ó $\quad b = 7$

Los valores de "b" que son solución de la primera ecuación son $b = 3,\ b = 7$

Ahora resolvemos la ecuación

$|3 \cdot 3 - b| = 2$

$|9 - b| = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 9 - b = 2 \quad$ ó $\quad 9 - b = -2$

$-b = -7 \quad$ ó $\quad -b = -11$

$b = 7 \quad$ ó $\quad b = 11$

Los valores de "b" que son solución de la segunda ecuación son $b = 7,\ b = 11$

El único valor de "b" que es solución de las dos ecuaciones es $b = 7$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Hallar el conjunto de ceros y el conjunto de positividad del polinomio

$$Q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

Respuesta

Primero hallamos el conjunto de ceros del polinomio.

Se puede verificar fácilmente que $x = 1$ es raíz del polinomio. Entonces podemos dividir al polinomio $Q(x)$ por $(x-1)$.

	1	-2	-1	2
1		1	-1	-2
	1	-1	-2	0

$Q(x) = (x-1)(x^2 - x - 2)$

Buscamos ahora las raíces de la cuadrática $x^2 - x - 2$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$x_1 = 2$; $x_2 = -1$

El conjunto de ceros del polinomio es:

$C^0 = \{-1; 1; 2\}$

El polinomio puede expresarse como

$Q(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$

Debemos analizar el signo del polinomio en los intervalos

$$(-\infty; -1)\ (-1; 1)\ (1; 2)\ (2; +\infty)$$

En el intervalo $(-\infty; -1)$ el signo del polinomio es negativo ya que $Q(-2) < 0$

En el intervalo $(-1; 1)$ el signo del polinomio es positivo ya que $Q(0) > 0$

En el intervalo $(1; 2)$ el signo del polinomio es negativo ya que $Q\left(\frac{3}{2}\right) < 0$

En el intervalo $(2; +\infty)$ el signo del polinomio es positivo ya que $Q(3) > 0$

Los intervalos de positividad del polinomio son: $(-1; 1)$; $(2; +\infty)$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el vértice de la parábola $y = -5x^2 + 2x + 3$ y cruza al eje de las abscisas en $x = 3$.

Respuesta

Calculamos el vértice de la parábola $y = -5x^2 + 2x + 3$

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$x_v = -\frac{2}{2\cdot(-5)} = \frac{1}{5}$$

$$y_v = -5\left(\frac{1}{5}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{5}\right) + 3 = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + 3$$

$$y_v = \frac{16}{5}$$

Entonces, el vértice de la parábola es el punto

$$V = \left(\frac{1}{5};\frac{16}{5}\right)$$

La ecuación de la recta que estamos buscando es de la forma

$$y = mx + b$$

Ya que la recta cruza al eje de las abscisas en $x = 3$ tenemos que

$$0 = m\cdot 3 + b \quad \Rightarrow \quad b = -3m$$

La recta pasa por el vértice de la parábola, entonces

$$\frac{16}{5} = m\cdot\frac{1}{5} + b \quad \Rightarrow \quad \frac{16}{5} = m\cdot\frac{1}{5} - 3m \quad \Leftrightarrow \quad \frac{16}{5} = -\frac{14}{5}m \quad \Leftrightarrow \quad m = -\frac{8}{7} \quad \therefore \quad b = \frac{24}{7}$$

La ecuación de la recta es

$$y = -\frac{8}{7}x + \frac{24}{7}$$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Dada la función

$$h(x) = 2\sqrt{3x^2 - 3} - 1$$

hallar analíticamente el dominio y la imagen de la función.

Respuesta

Primero hallamos el dominio de la función.

La función estará bien definida si el argumento de la raíz cuadrada es un número positivo.

Entonces pedimos que

$$3x^2 - 3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 \geq 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq 1 \text{ ó } x \leq -1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$$

El dominio de la función es el conjunto

$$Dom(h) = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$$

Para hallar el conjunto imagen debemos tener en cuenta que $\sqrt{t} \geq 0$ (con $t \geq 0$).

Entonces, para todo $x \in Dom(h)$ se verifica que

$$\sqrt{3x^3 - 3} \geq 0$$

$$2\sqrt{3x^3 - 3} \geq 0$$

$$2\sqrt{3x^3 - 3} - 1 \geq -1$$

$$h(x) \geq -1$$

Luego, el conjunto imagen de la función es el intervalo $[-1; +\infty)$