APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 40'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3+3x^2+7x}{x^4-1}$

A partir de lo estudiado en la unidad "Estudio de funciones", límite de funciones, conviene dividir el numerador y el denominador de la expresión algebraica fraccionaria por x elevada a la mayor potencia que aparezca tanto en el numerador como del denominador a los efectos de "salvar" la indeterminación (cociente de infinitos). Luego se distribuye, quedan cocientes de potencias de igual base que se resuelven y se toma el límite.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3+3x^2+7x}{x^4-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{5x^3+3x^2+7x}{x^4}}{\dfrac{x^4-1}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{5x^3}{x^4}+\dfrac{3x^2}{x^4}+\dfrac{7x}{x^4}}{\dfrac{x^4}{x^4}-\dfrac{1}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}}{1-\dfrac{1}{x^4}} = 0$$

El límite es cero porque el numerador tiende a 0 y el denominador a 1 cuando x tiende a infinito. (los términos que son cocientes entre constantes y x elevada a alguna potencia tienden a cero porque se tiene un número divido por una cantidad que crece indefinidamente)

En definitiva,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3+3x^2+7x}{x^4-1} = 0$$

2. Dada la función cuadrática $f(x) = ax^2 + 2x - 3$ con vértice en el punto $(-1; -2)$, hallar a y las raíces de la función.

Para resolver esta actividad se tendrán en cuenta los contenidos trabajados durante la unidad de Función cuadrática.

El objetivo del ejercicio es hallar el valor de "a" y las raíces de la función teniendo en cuenta el vértice y la expresión polinómica.

Presentamos diferentes maneras de encarar la situación a partir del enunciado:

a) Sea $V = (-1; -2)\ el\ vértice\ de\ la\ función$, esta coordenada nos determina que $x_v = -1 \ \ y_v = -2$, sabemos que el valor del x_v se puede obtener: $x_v = -\frac{b}{2a}$, por lo tanto si reemplazamos la información que tenemos en esta ecuación se obtiene:

$$-1 = -\frac{2}{2a}\ (Resolvemos\ la\ ecuación)$$

$$-1.2a = -2$$

$$2.a = 2 \text{ (simplificamos miembro a miembro)}$$

$$a = 1$$

Ahora bien, utilizando el valor de "a" podemos escribir la ecuación de la función cuadrática:

$$f(x) = 1x^2 + 2x - 3$$

Para hallar las raíces de la función utilizaremos la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Siendo: $a = 1 \quad b = 2 \quad c = -3$

Reemplazamos:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.(-3)}}{2.1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

Por lo tanto:

$$x_1 = \frac{-2 + 4}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-2 - 4}{2} = -3$$

Las raíces de la función son: $x_1 = 1 \qquad y \qquad x_2 = -3$

b) Sea $V = (-1; -2)$, esto significa que $x_v = -1 \ \ y_v = -2$, son las coordenadas de un punto de la gráfica de la función. Reemplacemos en la fórmula de la función y quedará como incógnita a, que podemos despejar para calcular su valor:

$$f(x) = ax^2 + 2x - 3$$

$$-2 = a(-1)^2 + 2(-1) - 3$$
$$-2 = a - 2 - 3$$

$$3 = a$$

Ahora bien, utilizando el valor de “a” podemos escribir la ecuación de la función cuadrática:

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 3$$

Para hallar las raíces de la función utilizaremos la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Siendo: $a = 3 \quad b = 2 \quad c = -3$

Reemplazamos:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.3.(-3)}}{2.3}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 36}}{6}$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{10}}{6}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{3}$$

Por lo tanto:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{10}}{3}$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{10}}{3}$$

Las raíces de la función son:

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{10}}{3} \quad y \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{10}}{3}$

c) Si tomamos la abscisa del vértice como -2, (Resolución a) no se está teniendo en cuenta la ordenada del vértice, y si se reemplaza . x_v en la fórmula obtenida, no coincide con la $y_v = -2$ del enunciado.

Por otra parte, si tomamos el punto que figura como vértice como un punto de la parábola (Resolución b), no se está utilizando que se trata del vértice, sino un punto de la parábola.
Si se exige que sea el vértice, no existe tal parábola.

Por lo tanto se tomarán como válidas en este parcial las tres resoluciones de este problema.

3. Dadas las funciones $\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{x}}$, $\boldsymbol{h(x) = x^2 - 1}$, hallar $\boldsymbol{g \circ h}$ y $\boldsymbol{h \circ g}$

Para resolver esta actividad se tendrán en cuenta los contenidos trabajados durante la unidad de Funciones.

En primer lugar trabajaremos con la composición: $g \circ h(x) = g\big(h(x)\big)$

Veamos que: $g\big(h(x)\big) = g(\, x^2 - 1)$

$$g \circ h(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Recordemos que la composición de funciones no cumple la propiedad conmutativa, por lo tanto $g \circ h \neq h \circ g$.

Ahora vamos a trabajar con $h \circ g\ (x) = h\big(g(x)\big)$

$$h\big(g(x)\big) = h\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$h\big(g(x)\big) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1$$

$$h \circ g\ (x) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1$$

4. Determinar el/los puntos del plano de abscisa positiva y ordenada 2, distante 5 unidades del punto $\boldsymbol{A = (3; -1)}$.

Definimos las coordenadas del punto que queremos encontrar: $P = (x; 2)$ considerando que $x \in \Re^+$ por tratarse de una abscisa positiva.

Consideramos la distancia entre los puntos $P\ y\ A$:

$$d\ \overline{PA} = \sqrt{(x-3)^2 + (2+1)^2}$$

$$5 = \sqrt{(x-3)^2 + (3)^2}$$

$$25 = (x-3)^2 + 9$$

$$25 - 9 = (x-3)^2$$

$$16 = (x-3)^2$$

$$\sqrt{16} = \sqrt{(x-3)^2}$$

$$4 = |x-3|$$

En consecuencia: $x = 7 \quad o\ bien \quad x = -1$

Como $x \in \Re^+$, resulta: $P = (7; 2)$

Para resolver este ejercicio resignificamos el concepto de distancia entre dos puntos. Este concepto se encuentra en el apunte teórico “Distancia entre puntos” correspondiente a la unidad Números reales y plano cartesiano.