TEMA 1

Ejercicio 1 (2 puntos)

Determinar analíticamente el valor de la constante $a \in \mathbb{R}$ para que el conjunto solución de la inecuación $|5x - a| \leq 3$ sea igual al intervalo $\left[-\frac{1}{5}; 1\right]$

Respuesta

Los extremos del intervalo del conjunto solución deben cumplir con las igualdades

$$\left|5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) - a\right| = 3 \quad y \quad |5 \cdot 1 - a| = 3$$

Busquemos el valor de $a \in \mathbb{R}$ que verifique ambas condiciones.

Primero resolvemos la ecuación

$$\left|5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) - a\right| = 3$$

$$|-1 - a| = 3 \quad \Leftrightarrow \quad -1 - a = 3 \quad ó \quad -1 - a = -3$$

$$-a = 4 \quad ó \quad -a = -2$$

$$a = -4 \quad ó \quad a = 2$$

Los valores de "a" que son solución de la primera ecuación son $a = -4,\ a = 2$

Ahora resolvemos la ecuación

$$|5 - a| = 3$$

$$|5 - a| = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 5 - a = 3 \quad ó \quad 5 - a = -3$$

$$-a = -2 \quad ó \quad -a = -8$$

$$a = 2 \quad ó \quad a = 8$$

Los valores de "a" que son solución de la segunda ecuación son $a = 2,\ a = 8$

El único valor de "a" que es solución de las dos ecuaciones es $a = 2$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Se sabe que $x = 1$ es raíz del polinomio $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$.

Hallar los intervalos de positividad y negatividad.

Respuesta

Para hallar los intervalos de positividad y negatividad del polinomio debemos conocer primero todas las raíces del polinomio.

Como $x = 1$ es raíz, podemos dividir al polinomio $P(x)$ por $(x - 1)$.

	1	4	1	-6
1		1	5	6
	1	5	6	0

$P(x) = (x - 1)(x^2 + 5x + 6)$

Buscamos ahora las raíces de la cuadrática $x^2 + 5x + 6$

$$x_{1,2} = \frac{-(5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

$x_1 = -3$; $x_2 = -2$

El conjunto de ceros del polinomio es:

$C^0 = \{-3; -2; 1\}$

El polinomio se puede expresar como

$P(x) = (x - 1)(x + 3)(x + 2)$

Debemos analizar el signo del polinomio en los intervalos

$$(-\infty; -3)\ (-3; -2)\ (-2; 1)\ (1; +\infty)$$

En el intervalo $(-\infty; -3)$ el signo del polinomio es negativo ya que $P(-4) < 0$

En el intervalo $(-3; -2)$ el signo del polinomio es positivo ya que $P\left(-\frac{5}{2}\right) > 0$

En el intervalo $(-2; 1)$ el signo del polinomio es negativo ya que $P(0) < 0$

En el intervalo $(1; +\infty)$ el signo del polinomio es positivo ya que $P(2) > 0$

Los intervalos de positividad del polinomio son: $(-3; -2)$; $(1; +\infty)$

Los intervalos de negatividad son: $(-\infty; -3)$; $(-2; 1)$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Hallar la ecuación de la parábola que cruza al eje de las abscisas en $x = 1$ y su vértice coincide con el de la parábola $y = 2x^2 + 7x$

Respuesta

Calculamos el vértice de la parábola $y = 2x^2 + 7x$

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$x_v = -\frac{7}{2 \cdot 2} = -\frac{7}{4}$$

$$y_v = 2\left(-\frac{7}{4}\right)^2 + 7.\left(-\frac{7}{4}\right)$$

$$y_v = -\frac{49}{8}$$

Entonces, el vértice de la parábola es el punto

$$V = \left(-\frac{7}{4}; -\frac{49}{8}\right)$$

Si expresamos la ecuación de la parábola que estamos buscando en forma canónica tenemos que

$$y = a\,.(x - x_v)^2 + y_v$$

$$y = a\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$$

Sabemos que $x = 1$ es raíz de la parábola (ya que cruza el eje de las abscisas en $x = 1$). Entonces podemos despejar el valor de la constante "a" de la ecuación

$$0 = a\left(1 + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$$

$$a\left(\frac{11}{4}\right)^2 = \frac{49}{8}$$

$$\frac{121}{16}a = \frac{49}{8} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{49}{8} \cdot \frac{16}{121} = \frac{98}{121}$$

Por lo tanto, la ecuación de la parábola es

$$y = \frac{98}{121}\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Determinar el dominio y el conjunto imagen de la función

$$f(x) = 1 + 2\sqrt{2x^2 - 2}$$

Respuesta

Primero hallamos el dominio de la función.

La función estará bien definida si el argumento de la raíz cuadrada es un número positivo.

Entonces pedimos que

$$2x^2 - 2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq 1 \text{ ó } x \leq -1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$$

El dominio de la función es el conjunto

$$Dom(f) = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$$

Para hallar el conjunto imagen debemos tener en cuenta que $\sqrt{t} \geq 0$ (con $t \geq 0$).

Entonces, para todo $x \in Dom(f)$ se verifica que

$$\sqrt{2x^2 - 2} \geq 0$$

$$2\sqrt{2x^2 - 2} \geq 0$$

$$1 + 2\sqrt{2x^2 - 2} \geq 1$$

$$f(x) \geq 1$$

Luego, el conjunto imagen de la función es el intervalo $[1; +\infty)$