APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Puntaje de cada ejercicio	2	0,50	0,50	2,50	0,50	0,50	0,50	0,50	2,50

Duración del examen: 2 hrs. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz. En los ejercicios de respuesta múltiple, elija la respuesta correcta de cada pregunta y márquela con una X.

1. De un grupo de 6 chicos y 4 chicas se desea formar un equipo con 6 personas, 3 de cada sexo. ¿Cuántos equipos distintos se pueden formar?

Estamos frente a una selección en la que no importa el orden en que se elijan las 6 personas que formarán los equipos. Además, cada uno de los integrantes solo puede elegirse una vez. A este tipo de formas de contar se la llama combinación simple o sin repetición. Asimismo, debemos considerar que:

* Tenemos dos conjuntos de los que debemos elegir los integrantes del equipo: 6 chicos y 4 chicas.
* Cada equipo se debe formar con 6 personas, 3 de cada sexo.
* Se deben elegir 3 chicos entre 6 y 3 chicas de un total de 4.
* Se deduce que los varones pueden agruparse de $C_{6,3}$ maneras y a su vez, por cada integrante elegido, podemos seleccionar a las mujeres de $C_{4,3}$ maneras.

Luego, por el principio de multiplicación, la cantidad de equipos distintos de 6 integrantes con 3 personas de cada sexo que se pueden formar son: $C_{6,3}\,.\,C_{4,3}$

Resolvemos:

$$C_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!\,.\,3!} = \frac{6!}{3!\,.\,3!} = 20$$

$$C_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!\,.\,3!} = \frac{4!}{1!\,.\,3!} = 4$$

Por último, $C_{6,3}\,.\,C_{4,3} = 20\,.\,4 = 80$. Por lo tanto, se pueden armar 80 equipos de 6 integrantes, 3 de cada sexo.

Para realizar el ejercicio utilizamos principalmente los conceptos de combinación simple o sin repetición y el principio de multiplicación, los cuales se encuentran explicados en el apunte “Elementos de combinatoria” de la sesión 11.

2. La integral de $\int \, \boldsymbol{ln}(\mathbf{2}\boldsymbol{ax}) \, \boldsymbol{dx}$ (para $\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$) es:

a) $x.ln(2ax) - x + C$ **CORRECTA**

b) $x.ln(2ax) - \frac{x}{2a} + C$

c) $2x.ln(ax) - x + C$

d) $ln(2ax) - \frac{x}{2a} + C$

Notamos que, además de x, el valor de a necesariamente es positivo para que el logaritmo quede bien definido en todo punto de la forma $2ax$.

Para resolver esta integral aplicamos el método de integración por partes. Encontramos este concepto en el apunte teórico *Métodos de integración* de la sección *U6. Apuntes de cátedra. Integrales*.

Denotamos $u = \ln(2ax)$ y $v' = 1$. Luego, $u' = \frac{1}{x}$ y $v = x$, y por la fórmula del método de partes obtenemos:

$$\int \ln(2ax)\, dx = \int 1.\ln(2ax)\, dx = xln(2ax) - \int \text{x}.\frac{1}{x} dx$$

$$= xln(2ax) - \int 1 \, dx$$

$$= xln(2ax) - \; x + C.$$

---

3. Dados los vectores $\boldsymbol{A} = (\mathbf{1}; \mathbf{2}; -\mathbf{5}), \boldsymbol{B} = (-\mathbf{1}; \mathbf{1}; \mathbf{1})\,, \boldsymbol{C} = (\mathbf{3}; -\mathbf{1}; \mathbf{1})$, el resultado de $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$, es:

a) 16

b) 0

c) 20 **CORRECTA**

d) – 24

Para poder resolver el ejercicio debemos considerar las definiciones de producto vectorial y producto escalar, las mismas se encuentran explicadas en el apunte “Vectores en R3” que se encuentra en la sesión 13.

En primer lugar, tenemos que resolver el producto vectorial entre B y C, es decir: $B \times C$

$B \times C = (1 - (-1); 3 - (-1); 1 - 3)$

$B \times C = (2; 4; -2)$

Luego, realizamos el producto escalar entre A y $B \times C$:

$A \cdot (B \times C) = 1\,.\,2 + 2\,.\,4 + (-5)\,.\,(-2)$

$A \cdot (B \times C) = 2 + 8 + 10 = 20$

Por lo tanto, la opción correcta es la c.

---

4. Hallar el valor de $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$ para que el siguiente sistema tenga infinitas soluciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2+k \\ 2 & k+4 & 1 \\ 0 & k+2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Para resolver el ejercicio debemos considerar los conceptos explicados en los apuntes “Matrices” y “Sistemas lineales y matrices” de la sesión 12.

Particularmente debemos tener en cuenta que, si el rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada son iguales pero menor al número de ecuaciones, el sistema es compatible indeterminado o tiene infinitas soluciones, es decir $\rho(A) = \rho(A^*) < n$.

Planteamos la matriz ampliada del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2+k & 3 \\ 2 & k+4 & 1 & 1 \\ 0 & k+2 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

Buscamos la matriz escalonada de la ampliada. Para hallar un cero en la posición a_{21} consideramos realizar $2F_1 - F_2 \rightarrow F_2$ y obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2+k & 3 \\ 0 & -k-2 & 2k+3 & 5 \\ 0 & k+2 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

Luego, para hallar un cero en la posición a_{32} realizamos $F_2 + F_3 \rightarrow F_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2+k & 3 \\ 0 & -k-2 & 2k+3 & 5 \\ 0 & 0 & 2k+4 & 0 \end{array}\right)$$

Para que el sistema resulte compatible indeterminado, debemos considerar que: $2k + 4 = 0$

Despejamos y resulta que $k = -2$

---

5. El valor de a $\in \Re$ para el cual se cumple que $\int_0^1 (ax^2 + x)dx = 0$, es:

a) -3

b) $-\frac{3}{2}$ **CORRECTA**

c) $No\ existe\ ningún\ valor\ de\ a \in \Re\ que\ verifique\ lo\ pedido$

d) $\frac{3}{2}$

Resolvemos la ecuación integral del enunciado para encontrar el valor de $a \in \mathbb{R}$ pedido aplicando primero la propiedad de linealidad de la integral, luego integrando por tabla y finalmente aplicando la regla de Barrow:

$$\int_0^1 (ax^2 + x)dx = 0$$

$$\int_0^1 ax^2 dx + \int_0^1 x dx = 0$$

$$a\int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x dx = 0$$

$$a.\left[\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_0^1 = 0$$

$$a.\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 0$$

$$a = -\frac{3}{2}.$$

En el apunte teórico de la materia *Integral definida* de la sección *U6. Apuntes de cátedra. Integrales* encontramos ejemplos como este, y los conceptos que fueron aplicados se encuentran además en el apunte *Integrales* de la misma sección.

---

6. Sea $f(x) = \frac{3x}{x^2+4}$, el conjunto donde la función f es creciente, es:

a) $(-2; 2)$ **CORRECTA**

b) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

c) $\emptyset$

d) $(-\infty; 2)$

Notamos que $Dom(f) = \mathbb{R}$ porque el denominador nunca se anula.

Como la función f es derivable en su dominio, podemos encontrar el conjunto donde f es creciente hallando el conjunto donde la derivada es positiva; es decir, debemos hallar el conjunto de positividad de f'. Esto se encuentra explicado en el apunte teórico *Estudio de funciones* de la sección *U5. Apuntes de cátedra. Derivadas* de la materia.

Aplicando la fórmula para derivar una división de funciones, obtenemos

$$f'(x) = \frac{3.(x^2+4) - 3x.2x}{(x^2+4)^2} = \frac{3x^2+12-6x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{-3x^2+12}{(x^2+4)^2}$$

y notamos que $Dom(f') = \mathbb{R}$.

Hallamos los puntos críticos igualando la derivada a cero y luego aplicamos Bolzano para encontrar el conjunto de negatividad de la derivada, que es precisamente el conjunto donde la función original es creciente.

$$f'(x) = \frac{-3x^2+12}{(x^2+4)^2} = 0$$

$$-3x^2 + 12 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Luego, tomamos un punto intermedio en (-∞, -2) para ver el signo de f' en ese conjunto: $f'(-3) < 0$, por lo que (-∞, -2) es parte del conjunto de negatividad de f'. Lo mismo hacemos para (2, +∞) evaluando en x = 3 y concluimos que (2, +∞) también es parte del conjunto de negatividad de la derivada. Finalmente, evaluando $f'(0) > 0$ vemos que el intervalo (-2, 2) es el conjunto de positividad de la derivada, con lo cual este mismo es exactamente el conjunto donde f es creciente.

---

7. Dados los planos: π_1: $x+2y+2z=8$ $\pi_2: -x+y-z=-1$ y el plano π_3 que pasa por los puntos: $A=(-2\,;1\,;4)$ $B=(0\,;2\,;2)$ y $C=(-1\,;3\,;1)$, las coordenadas del punto de intersección entre los tres planos son:

a) $x \in R,\ y \in R,\ z \in R, (x;y;z)=(-2;1;4)$ **CORRECTA**

b) $x \in R,\ y \in R,\ z \in R, (x;y;z)=(2;4;1)$

c) $x \in R,\ y \in R,\ z \in R, (x;y;z)=(2;-1;4)$

d) $x \in R,\ y \in R,\ z \in R, (x;y;z)=(2;-4;1)$

Para poder encontrar el punto de intersección de los planos debemos conocer la ecuación del plano π_3, para eso necesitamos hallar un vector normal al plano que determinan los vectores. Por lo tanto, consideramos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}=(0\,;2\,;2)-(-2\,;1\,;4)=(2;1;-2)$

$\overrightarrow{AC}=(-1\,;3\,;1)-(-2\,;1\,;4)=(1\,;2\,;-3)$

Hallamos el vector normal a ellos utilizando el producto escalar: $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(1.(-3)-(-2).2;(-2).1-2.(-3);2.2-1.1)=(1;4;1)$

Entonces la ecuación del plano π_3 resulta: $\big((x;y;z)-(-2\,;1\,;4)\big).(1;4;1)=0$

$(x+2\,;y-1\,;z-4).(1;4;1)=0$

Si aplicamos la definición de producto escalar y operamos, obtenemos que, $\pi_3: x+4y+z=6$

Para hallar la intersección de los planos, planteamos:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\ -1\\ 6\end{pmatrix}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones lineales que quedó planteado, consideramos la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 2 & 8\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 4 & 1 & 6\end{array}\right)$$

Luego, buscamos la matriz escalonada de la ampliada. Para hallar un cero en la posición a_{21} y a_{23} consideramos realizar $F_2+F_3\rightarrow F_2$ y obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 2 & 8\\ 0 & 5 & 0 & 5\\ 1 & 4 & 1 & 6\end{array}\right)$$

Despejamos y obtenemos que $y=1$. Luego resulta que $x=-2$ y $z=4$

Por lo tanto, la opción correcta es la a.

Cabe destacar que para resolver el ejercicio debemos considerar los conceptos explicados en los apuntes "Matrices", "Sistemas lineales y matrices" de la sesión 12, "Vectores en R3" y "Rectas y planos" que se encuentran en la sesión 13.

8. El valor de la constante $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$, para que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $\boldsymbol{g(x) = 3x + e^{a+x}}$, sea 4, en el punto $\boldsymbol{P = (-2; g(2))}$, es:

a) $a = -2$

b) $a = -1$

c) $a = 2$ CORRECTA

d) $a = 1$

La pendiente de la recta tangente al gráfico de g en el punto x = -2 es exactamente el valor $g'(-2)$.

Derivando g e igualando $g'(-2) = 4$ obtenemos:

$g'(x) = 3 + e^{a+x}$ y $g'(-2) = 3 + e^{a-2}$, entonces

$$3 + e^{a-2} = 4$$

$$e^{a-2} = 1$$

$$\ln(e^{a-2}) = \ln(1)$$

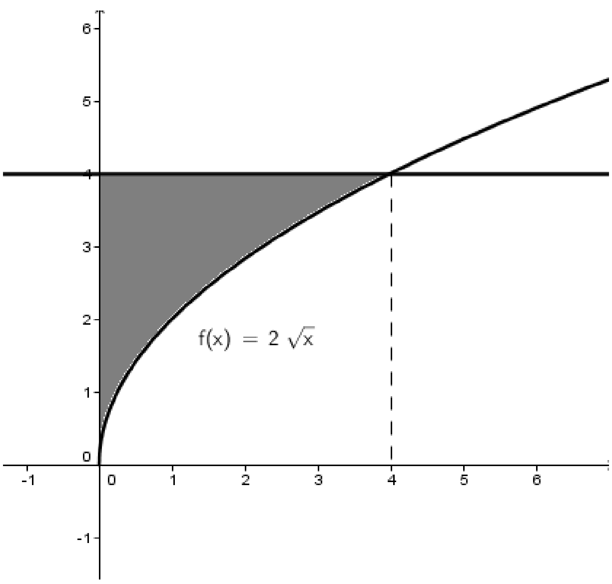
$$a - 2 = 0$$

$$a = 2$$

Encontramos estos conceptos en el apunte teórico *Derivadas* de la sección *U5. Apuntes de cátedra. Derivadas* de la materia.

---

9. Hallar el área de la región sombreada



Los conceptos aplicados en la resolución de este ejercicio pueden encontrarse en los apuntes *Cálculo de área* e *Integrales definidas* de la sección *U6. Apuntes de cátedra. Integrales* de la materia.

El área de la región sombreada se calcula planteando la integral definida entre 0 y 4 de la función “techo” menos la función “piso”, donde la función techo es la recta $y = 4$ y la función piso es $y = 2\sqrt{x}$:

$Área = \int_0^4 Techo - Piso = \int_0^4 4 - 2\sqrt{x}\ dx.$

Para resolver esta integral, primero calculamos la integral indefinida:

$\int 4 - 2\sqrt{x}\, dx = 4x - 2.\frac{2}{3}\, x^{\frac{3}{2}} = 4x - \frac{4}{3}\, x^{\frac{3}{2}} + C$

Y usamos esto para calcular el área junto con la regla de Barrow:

$\int_0^4 4 - 2\sqrt{x}\ dx = \left[4x - \frac{4}{3}\, x^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^4 = 4.4 - \frac{4}{3}\, 4^{\frac{3}{2}} - 0 = 16 - \frac{4}{3}.8 = 16 - \frac{32}{3} = \frac{16}{3}.$

Luego, el área de la región sombreada en el gráfico es $\frac{16}{3}$.