# TEMA 1

**Ejercicio 1 (2 puntos)**

Sea $f(x)$ la función lineal cuya gráfica pasa por los puntos $P = (-2; -8)$ y $Q = (1; 1)$.

Hallar analíticamente los valores de $x \in A$ siendo

$$A = \{x \in \mathbb{R} / \ \ |f(x)| < 2\}$$

Para empezar, comenzamos determinando la expresión analítica de la función lineal que une los puntos los puntos $\mathrm{P} = (-2; -8)$ y $\mathrm{Q} = (1; 1)$.

Para esto, hallamos la pendiente de la recta que une ambos puntos:

$$m = \frac{1-(-8)}{1-(-2)} = \frac{1+8}{1+2} = \frac{9}{3} = 3$$

Conociendo la pendiente de la recta, la ecuación de la recta que une los puntos P y Q podemos determinarla usando cualquiera de los dos puntos.

En este caso, elegimos hacerlo con el punto $\mathrm{Q} = (1; 1)$:

$$y - 1 = 3 \cdot (x - 1)$$

$$y = 3 \cdot (x - 1) + 1$$

O bien:

$$y = 3x - 3 + 1$$

$$y = 3x - 2$$

Por lo tanto, la función pedida es:

$$f(x) = 3x - 2$$

Ahora bien, tenemos que determinar analíticamente los valores de $x \in A$ siendo

$$A = \{x \in \mathbb{R} / \ \ |f(x)| < 2\}$$

Para esto, resolvemos la inecuación planteada:

$$|f(x)| < 2$$

$$|3x - 2| < 2$$

Aplicamos las propiedades del módulo o valor absoluto:

$$|3x-2|<2 \quad \text{sí y sólo si} \quad -2<3x-2<2$$

$$0<3x<4$$

$$0<x<\frac{4}{3}$$

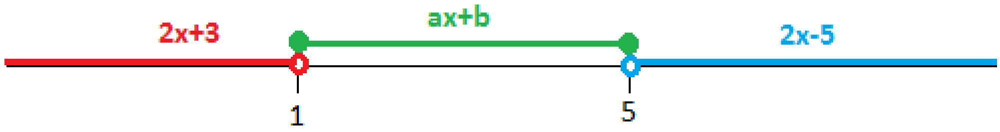
Finalmente, $x \in \left(0;\frac{4}{3}\right)$

**Ejercicio 2 (3 puntos)**

Encontrar el valor de las constantes **a** y de **b** para que la siguiente función sea continua en todo su dominio:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+3 & si\ x<1 \\ ax+b & si\ 1\le x\le 5 \\ 2x-5 & si\ x>5 \end{cases}$$

Si traducimos la información que tenemos de esta función en un esquema, vemos que está partida en tres sectores:




Las imágenes de $x=1$ y $x=5$ existen y coincidirán con el límite a derecha de $x=1$ y a izquierda de $x=5$. Por lo tanto, las únicas condiciones que deben cumplirse para que sea continua en todo su dominio son:

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^-} f(x)$$

y

$$\lim_{x\to5^+} f(x)=\lim_{x\to5^-} f(x)$$

Comenzamos por la primera condición:

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to1^+}(ax+b)=\lim_{x\to1^-}(2x+3)$$

Determinamos ambos límites y nos queda que:

$$a+b=5 \quad \textbf{(A)}$$

Con la segunda condición tenemos que:

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^-} f(x)$$
$$\lim_{x\to 5^+} (2x-5) = \lim_{x\to 5^-} (ax+b)$$

Determinamos ambos límites y nos queda que:

$$5 = 5a + b \quad \textbf{(B)}$$

Despejamos “$b$” de la igualdad **(A)** y la reemplazamos en **(B)**:

En **(A)**: $b = 5 - a$

En **(B)**: $5 = 5a + (5 - a)$

$$5 = 5a + 5 - a$$
$$0 = 4a$$
$$0 = a$$

Como sabemos que $b = 5 - a$ y $a = 0$; tenemos que $b = 5$

Por lo tanto, los valores pedidos son: $a = 0$ y $b = 5$

**Ejercicio 3 (2 puntos)**

Determinar el dominio de la función

$$g(x) = \log_2(x+1)$$

y el conjunto de ceros $C^0$ de la función $g^{-1}(x)$

La función $g(x)$ es una función logarítmica. Por lo tanto, para determinar el dominio de dicha función debemos considerar que el argumento debe ser positivo.

Esto significa que

$$x + 1 > 0 \;\Rightarrow\; x > -1$$

Por lo tanto, el dominio de $g(x)$ es el intervalo $(-1; +\infty)$

Por otro lado, nos piden hallar el $C^0$ de la función $g^{-1}(x)$… la inversa de $g(x)$. Para esto, comenzamos por determinar la expresión de $g^{-1}(x)$.

Partimos de $g(x)$:

$$y = \log_2(x+1)$$

Expresamos la función de la forma $x = g(y)$.

Para esto, despejamos la variable “x” de la función:

$$y = \log_2(x+1)$$

Aplicamos la definición del logaritmo:

$$2^y = x + 1$$

$$2^y - 1 = x$$

Hacemos un cambio de variables:

$$2^x - 1 = y$$

Por lo tanto,

$$g^{-1}(x) = 2^x - 1$$

Ahora, determinamos el $C^0$ de la función $g^{-1}(x)$. Para esto, resolvemos la siguiente ecuación:

$$2^x - 1 = 0$$

$$2^x = 1$$

$$2^x = 2^0$$

$$x = 0$$

Por último, tenemos que $C^0 = \{0\}$

**Ejercicio 4 (3 puntos)**

Hallar todos los valores de $x \in [0;\pi]$ en los que la recta tangente a la gráfica de la función

$f(x) = sen\left(2x + \frac{3}{2}\pi\right)$

sea paralela a la recta de ecuación $3y + 6x - 1 = 0$

Como la recta tangente debe resultar paralela a la recta $3y + 6x - 1 = 0$, lo primero que debemos determinar es su pendiente. Para esto, expresamos a la recta de la siguiente manera:

$$3y = 1 - 6x$$

$$y = \frac{1 - 6x}{3}$$

$$y = \frac{1}{3} - 2x$$

Por lo tanto, para que la recta tangente sea paralela a la recta anterior, su pendiente debe ser igual a $-2$.

Sabemos que la pendiente de la recta tangente se obtiene a partir de la derivada de $f(x)$; por lo tanto, aplicamos la regla de la cadena para determinar $f'(x)$:

$$f'(x) = \cos\left(2x + \frac{3}{2}\pi\right) \cdot 2$$

Como la pendiente de la recta tangente, en este caso, debe ser $-2$ esto implica que $f'(x) = -2$:

$$-2 = \cos\left(2x + \frac{3}{2}\pi\right) \cdot 2$$

Resolvemos la ecuación trigonométrica para determinar los valores de $x$ pedidos:

$$-1 = \cos\left(2x + \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$2x + \frac{3}{2}\pi = (2k+1) \cdot \pi$$

$$2x + \frac{3}{2}\pi = 2k\pi + \pi$$

$$2x = 2k\pi + \pi - \frac{3}{2}\pi$$

$$x = \left(2k\pi - \frac{1}{2}\pi\right) : 2$$

$$x = k\pi - \frac{1}{4}\pi$$

Si $k = 0 \;\rightarrow\; x = -\frac{1}{4}\pi \;\rightarrow\; x \notin [0;\pi]$

Si $k = 1 \;\rightarrow\; x = \pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi \;\rightarrow\; x \in [0;\pi]$

Si $k = 2 \;\rightarrow\; x = 2\pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{7}{4}\pi \;\rightarrow\; x \notin [0;\pi]$

Por lo tanto, $x = \frac{3}{4}\pi$

# Tema 2

**Ejercicio 1 (2 puntos)**

Determinar el dominio de la función

$$f(x) = \log_3(x+9)$$

y el conjunto de ceros $C^0$ de la función $f^{-1}(x)$

La función $f(x)$ es una función logarítmica. Por lo tanto, para determinar el dominio de dicha función debemos considerar que el argumento debe ser positivo.

Esto significa que

$$x+9>0 \;\Rightarrow\; x>-9$$

Por lo tanto, el dominio de $f(x)$ es el intervalo $(-9;+\infty)$

Por otro lado, nos piden hallar el $C^0$ de la función $f^{-1}(x)$… la inversa de $f(x)$. Para esto, comenzamos por determinar la expresión de $f^{-1}(x)$.

Partimos de $f(x)$ diciendo que

$$y = \log_3(x+9)$$

Expresamos la función de la forma $x = f(y)$.

Para esto, despejamos la variable "x" de la función:

$$y = \log_3(x+9)$$

Aplicamos la definición del logaritmo:

$$3^y = x+9$$

$$3^y - 9 = x$$

Hacemos un cambio de variables:

$$3^x - 9 = y$$

Por lo tanto,

$$f^{-1}(x) = 3^x - 9$$

Ahora, determinamos el $C^0$ de la función $f^{-1}(x)$. Para esto, resolvemos la siguiente ecuación:

$$3^x - 9 = 0$$
$$3^x = 9$$
$$3^x = 3^2$$
$$x = 2$$

Por último, $C^0 = \{2\}$

**Ejercicio 2 (3 puntos)**

Hallar todos los valores de $x \in [0;\pi]$ en los que la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = cos\left(3x - \frac{1}{2}\pi\right)$ sea perpendicular a la recta de ecuación $3y + x - 1 = 0$

Como la recta tangente debe resultar perpendicular a la recta $3y + x - 1 = 0$, lo primero que debemos determinar es su pendiente. Para esto, expresamos a la recta de la siguiente manera:

$$3y = 1 - x$$
$$y = \frac{1-x}{3}$$
$$y = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x$$

Por lo tanto, para que la recta tangente sea perpendicular a la recta anterior, su pendiente debe ser igual a 3. Sabemos que la pendiente de la recta tangente se obtiene a partir de la derivada de $g(x)$; por lo tanto, aplicamos la regla de la cadena para determinar $g'(x)$:

$$g'(x) = -\text{sen}\left(3x - \frac{1}{2}\pi\right) \cdot 3$$

Como la pendiente de la recta tangente, en este caso, debe ser 3 esto implica que $g'(x) = 3$:

$$3 = -\text{sen}\left(3x - \frac{1}{2}\pi\right) \cdot 3$$

Resolvemos la ecuación trigonométrica para determinar los valores de $x$ pedidos:

$$-1 = \text{sen}\left(3x - \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$3x - \frac{1}{2}\pi = (4k+3) \cdot \frac{1}{2}\pi$$

$$3x - \frac{1}{2}\pi = 2k\pi + \frac{3}{2}\pi$$

$$3x = 2k\pi + \frac{3}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi$$

$$3x = 2k\pi + 2\pi$$

$$x = (2k\pi + 2\pi): 3$$

$$x = \frac{2}{3}k\pi + \frac{2}{3}\pi$$

Si $k = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{2}{3}\pi \;\rightarrow\; x \in [0;\pi]$

Si $k = 1 \;\rightarrow\; x = \frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi \;\rightarrow\; x \notin [0;\pi]$

Si $k = -1 \;\rightarrow\; x = -\frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi = 0 \;\rightarrow\; x \in [0;\pi]$

Por lo tanto, $x = \frac{2}{3}\pi$ y $x = 0$

**Ejercicio 3 (2 puntos)**

Sea $f(x)$ la función lineal cuya gráfica pasa por los puntos $Q = (2;-1)$ y $P = (-1;5)$.

Hallar analíticamente los valores de $x \in B$ siendo

$$B = \{x \in \mathbb{R} / \;\; |f(x)| \leq 3\}$$

Para empezar, comenzamos determinando la expresión analítica de la función lineal que une los puntos los puntos $\text{Q} = (2;-1)$ y $\text{P} = (-1;5)$.

Para esto, hallamos la pendiente de la recta que une ambos puntos:

$$m = \frac{5-(-1)}{-1-2} = \frac{5+1}{-3} = \frac{6}{-3} = -2$$

Conociendo la pendiente de la recta, la ecuación de la recta que une los puntos P y Q podemos determinarla usando cualquiera de los dos puntos.

En este caso, elegimos hacerlo con el punto $Q = (2; -1)$:

$$y - (-1) = -2 \cdot (x - 2)$$
$$y + 1 = -2 \cdot (x - 2)$$
$$y = -2 \cdot (x - 2) - 1$$

O bien:

$$y = -2x + 4 - 1$$
$$y = -2x + 3$$

Por lo tanto, la función pedida es:

$f(x) = -2x + 3$

Ahora bien, tenemos que determinar analíticamente los valores de $x \in A$ siendo

$A = \{x \in \mathbb{R} / \ \ |f(x)| \leq 3\}$

Para esto, resolvemos la inecuación planteada:

$$|f(x)| \leq 3$$
$$|-2x + 3| \leq 3$$

Aplicamos las propiedades del módulo o valor absoluto:

$|-2x + 3| \leq 3$ sí y sólo si $-3 \leq -2x + 3 \leq 3$

y

$$-3 \leq -2x + 3 \qquad\qquad -2x + 3 \leq 3$$
$$-6 \leq -2x \qquad\qquad -2x \leq 0$$
$$-6 : (-2) \geq x \qquad\qquad x \geq 0 : (-2)$$
$$3 \geq x \qquad\qquad x \geq 0$$

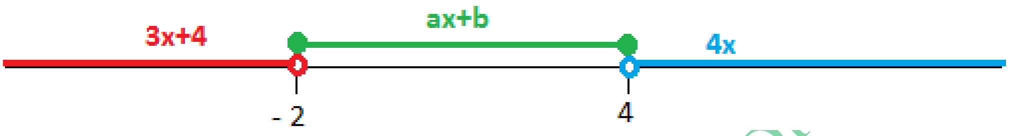
Finalmente, $x \in [0; 3]$

**Ejercicio 4 (3 puntos)**

Encontrar el valor de las constantes **a** y de **b** para que la siguiente función sea continua en todo su dominio:

$$f(x)=\begin{cases}3x+4 & si\ x<-2\\ ax+b & si-2\leq x\leq 4\\ 4x & si\ x>4\end{cases}$$

Si traducimos la información que tenemos de esta función en un esquema, vemos que está partida en tres sectores:




Las imágenes de $x=-2$ y $x=4$ existen y coincidirán con el límite a derecha de $x=-2$ y a izquierda de $x=4$. Por lo tanto, las únicas condiciones que deben cumplirse para que sea continua en todo su dominio son:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^-} f(x)$$

y

$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^-} f(x)$$

Comenzamos por la primera condición:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to -2^+} (ax+b)=\lim_{x\to -2^-} (3x+4)$$

Determinamos ambos límites y nos queda que:

$-2a+b=-2$ **(A)**

Con la segunda condición tenemos que:

$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to 4^+} (4x)=\lim_{x\to 4^-} (ax+b)$$

Determinamos ambos límites y nos queda que:

$16 = 4a + b$ **(B)**

Despejamos "$b$" de la igualdad **(A)** y la reemplazamos en **(B)**:

En **(A)**: $b = 2a - 2$

En **(B)**: $16 = 4a + (2a - 2)$

$$16 = 4a + 2a - 2$$

$$18 = 6a$$

$$3 = a$$

Como sabemos que $b = 2a - 2$ y $a = 3$; tenemos que $b = 4$

Por lo tanto, los valores pedidos son: $a = 3$ y $b = 4$