RESUMEN IPC PRIMER PARCIAL

EL RECONOCIMIENTO DE ARGUMENTOS

- **Enunciado →** Oraciones declarativas que niegan o afirman que algo objetivo sea el caso, implicando una evaluación en términos veritativos.
  Estos afirman **proposiciones** (lo que se quiere expresar), que se diferencian del soporte material del enunciado.
  A su vez, contienen **expresiones**, las cuales pueden ser *usadas* (refieren a una entidad extralingüística), o *mencionadas* (cuando se refiere a la misma expresión en sí)
- **Argumento →** Fragmento del lenguaje, conjunto de enunciados donde alguno(s) de ellos se pronuncia a favor de otro. Están compuestos por:
  - **Premisas →** conjunto de enunciados que se ofrecen como razones.
  - **Conclusión →** oración a favor de la cual se argumenta.

TIPOS DE ENUNCIADOS

- **Enunciados simples →** No contienen expresiones lógicas, ni se pueden descomponer en otros enunciados.
- **Enunciados complejos →** Son una combinación de enunciados mediante el uso de **expresiones lógicas** (conectivas).

y, o, pero, si… entonces, siempre y cuando, no

SEGÚN CONECTIVAS LÓGICAS

CONJUNCIONES

- Tipo de enunciado complejo en el que se afirman dos o más enunciados llamados **conyuntos**, que se combinan entre sí por la conectiva "y".
  - Estos enunciados se denominan verdaderos solamente cuando ambos conyuntos son verdaderos
- Un ejemplo puede ser "El decreto y el coronavirus imposibilitan la salida a la calle"

	A	B	A y B
1	V	V	**V**
2	V	F	**F**
3	F	V	**F**
4	F	F	**F**

DISYUNCIONES

- Tipo de enunciado complejo que combina dos o más enunciados, pero sin afirmar que ambas proposiciones sean el caso. Esta clasificación, a su vez se divide en dos, indicadas por el contexto de emisión, o expresiones características:
  - **Inclusiva →** se afirma que uno de los conyuntos es verdadero, sin descartar ni asegurar que el otro también pueda serlo. Se distingue por el uso de "o"
  - **Exclusiva →** se afirma que uno de los conyuntos es verdadero, pero excluye la posibilidad de que ambos lo sean. Se distingue por el uso de "o bien…, o bien…".

	A	B	A o B	O bien A o bien B
1	V	V	V	**F**
2	V	F	V	**V**
3	F	V	V	**V**
4	F	F	F	**F**

CONDICIONALES

- Tipo de enunciado complejo de carácter condicional o hipotético, que combina dos enunciados sin afirmar ninguna proposición, si no, una relación entre ellas: en el caso de que se dé una, debe darse la otra.
  - Se expresa como *Si, A entonces B*, o en lenguaje formal, como **A → B**
    - La parte del enunciado que figure antes de → (A, en este caso), se llama **antecedente**. Suele estar precedido por "si"
    - La parte del enunciado que figure después de → (B, en este caso), se llama **consecuente.**

Este orden no es estricto, el consecuente puede figurar antes que el antecedente en el enunciado, y aun así respetar la estructura

CONDICIONES SUFICIENTES

- El enunciado afirma que tal condición (antecedente) es **suficiente** para que suceda el consecuente. Es decir, si sucede el consecuente, el antecedente no necesariamente es el responsable.
  - Se puede expresar con *Si…, entonces…; es suficiente… para…; basta que… para…;* etc.
  - El único caso en que este enunciado puede ser falso, es cuando cuenta con antecedente verdadero y consecuente falso.
- Un ejemplo puede ser "Es suficiente que estudie para aprobar"
  1. Si *estudio y apruebo*, la condición suficiente se cumple, y el consecuente también, el enunciado resulta verdadero.
  2. Si *estudio y no apruebo*, la condición suficiente se cumple, pero el consecuente no, el enunciado resulta falso.
  3. Si *no estudio y apruebo*, aunque la condición suficiente no se cumpla, se puede haber cumplido otra condición suficiente, y al también ser verdadero el consecuente, el enunciado sigue siendo verdadero.
  4. Si *no estudio y no apruebo*, no se cumplió la condición suficiente, por lo tanto, no hay razón aparente para que el consecuente no deba ser falso, el enunciado sigue siendo verdadero.

	A	B	A → B
1	V	V	**V**
2	V	F	**F**
3	F	V	**V**
4	F	F	**V**

CONDICIONES NECESARIAS

- El enunciado afirma que tal condición (consecuente) es **necesaria** para que suceda el antecedente. Es decir, si sucede la condición, si o si tiene que suceder el antecedente, y es la única opción de que este último suceda.
  - Se puede expresar con *Es necesario que… para que…*; *Únicamente si…, …; …, solo si…*; etc.
  - El único caso en que este enunciado puede ser falso, es cuando cuenta con antecedente verdadero y consecuente falso.
    - El caso es el mismo que en las condiciones suficientes, pero la diferencia radica en que en este enunciado el consecuente y el antecedente cambian de lugar.
- Un ejemplo puede ser "Es necesario que me vean en falta para que me anulen el examen"
  1. Si me ven en falta y me anulan el examen, la condición necesaria y el antecedente resultan verdaderos, al igual que el enunciado
  2. Si no me ven en falta y me anulan el examen, la condición necesaria no se está cumpliendo, por lo que el consecuente es falso, y el enunciado también.
  3. Si me ven en falta y no me anulan el examen, la condición necesaria se está cumpliendo, pero tal vez ésta no sea suficiente.
  4. Si no me ven en falta y no me anulan el examen, no se estarían dando ni la condición necesaria, ni el antecedente, por lo que el enunciado es verdadero.

	A	B	B → A
1	V	V	**V**
2	V	F	**F**
3	F	V	**V**
4	F	F	**V**

BICONDICIONALES

- El enunciado afirma que tal condición (antecedente y consecuente) es **suficiente** y **necesaria** para que suceda el otro.
  - Se puede expresar con *Si y solo si…* o *siempre y cuando….*
  - Este enunciado resulta falso siempre que ambas condiciones no sean verdaderas o falsas.
- Un ejemplo puede ser "Doy clases particulares, siempre y cuando me paguen"
  1. Si doy clases particulares y me pagan, el antecedente y consecuente son verdaderos, y el enunciado también.
  2. Si doy clases particulares y no quieren pagar, no voy a dar clases particulares; por lo que el enunciado es falso
  3. Si no doy clases particulares, aunque la intención sea pagarme, no van a pagarme por un servicio que no doy, el enunciado es falso.
  4. Si no doy clases particulares no tienen por qué pagarme, y viceversa, el enunciado es verdadero, porque no se cumplen ninguna de las dos partes.

	A	B	A↔ B
1	V	V	**V**
2	V	F	**F**
3	F	V	**F**
4	F	F	**V**

NEGACIONES

- Tipo de enunciado en el que **se niega que sea el caso** en el que ocurra algo.
  - Se expresa con *es falso que*, *no*, *no es cierto que*, *nadie*; utilizando la partícula *des-* o *in-*
  - El valor veritativo de estos enunciados radica en la oración sujeta a negación. Es decir, el enunciado será verdadero o falso teniendo en cuenta la veracidad de los enunciados que a su vez lo compongan, y la negación de estos.

	A	No A
1	V	**F**
2	F	**V**

SEGÚN ALCANCE (SIMPLES)

- **Singulares** → Refieren a un **individuo específico**. Su veracidad se comprueba simplemente con verificar el hecho. *Ej:* me duele la cabeza
- **Universales** → Refieren a **todos los miembros de un conjunto**. Su veracidad se comprobaría encontrando un caso que no cumpla con lo implicado. *Ej:* a todos los estudiantes les duele la cabeza
- **Existenciales** → Refieren a **algunos miembros de un conjunto**. Su veracidad se comprobaría encontrando solo un caso que cumpla con lo implicado. *Ej:* a parte de los estudiantes les duele la cabeza
- **Probabilísticos** → Refiere a un **conjunto determinado**, y **establece una probabilidad de que los miembros de tal conjunto cumplan con una propiedad**. Pueden ser estadísticos (x%), o probabilísticos (la mayoría, pocos, etc.). Su veracidad no se puede comprobar concretamente, pero se puede llegar a un resultado aproximado con un seguimiento del conjunto. *Ej:* al 70% / a la mayoría de los estudiantes les duele la cabeza

SEGÚN CONTENIDO Y FORMA

- **Contingencias** → El enunciado puede ser verdadero o falso según se dé o no el estado del **caso especificado**. *Ej:* tengo miopía.
- **Tautologías** → El enunciado es **necesariamente verdadero** en virtud de su estructura (*A o no A*; *si A, entonces A*; etc.) *Ej:* si tengo miopía, entonces tengo miopía.
- **Contradicciones** → El enunciado es **necesariamente falso** en virtud de su estructura (*A y no A*, negaciones de tautologías, etc.) Ej: tengo miopía y no tengo miopía.

ARGUMENTOS DEDUCTIVOS E INDUCTIVOS

- **Inferencia** → paso de premisas a conclusión. Involucra suponer verdaderas las premisas, lo cual deja un margen de error en cuando a la inferencia o las mismas premisas.
- Los argumentos entonces van a ser evaluados mediante **lógica**. Esta disciplina provee estrategias para evaluar argumentos: el **apoyo y grado del mismo a una conclusión**, y la **plausibilidad de las premisas.**
  - La lógica si bien no da un veredicto directo sobre si un argumento resulta verdadero o falso, logra, identificando la estructura y considerando las oraciones involucradas en éste, identificar cuál es el proceso para saber sus condiciones veritativas, y con ello dirimir si deben o no ser aceptados.

ARGUMENTOS DEDUCTIVOS

- En este tipo de argumentos, las premisas se pronuncian *concluyente* y *necesariamente* a favor de la conclusión. Es decir, quien acepta las premisas, debe aceptar la conclusión.
- Estos argumentos están caracterizados por la **formalidad**: la necesidad de la conclusión de asociarse con las premisas se garantiza debido a la estructura del argumento. → $\dfrac{A \text{ y } B}{A}$
- Estos argumentos son **válidos**: **si las premisas son verdaderas, la conclusión si o si también debe ser verdadera**, es decir, se preserva la verdad.
  - La validez de un argumento no garantiza que este sea verdadero. Por eso cuando un argumento deductivo **además de ser válido, tiene premisas verdaderas**, se dice que es **sólido**.
    - Las premisas se toman como un conjunto: basta que una premisa sea falsa para considerar a "las premisas" enteramente falsas.
    - El único caso en el que un argumento deductivo se considera inválido, es cuando este cuenta con premisas verdaderas y conclusión falsa (4). Aun así, un argumento con premisas falsas y conclusión verdadera (3), si puede ser válido.

	PREMISAS	CONCLUSIÓN	ARGUMENTO
1	V	V	VAL
2	F	F	VAL
3	F	V	VAL
4	V	F	INV

- Una forma de determinar la validez de un argumento, es considerar si las condiciones de verdad de las premisas garantizan las condiciones de verdad de la conclusión.
- Otra forma es usando reglas de inferencia para deducir la conclusión. Una **deducción** es una secuencia de oraciones que parten de premisas, y donde cada una de las líneas siguientes se obtiene aplicando reglas de inferencia a las anteriores, y la última línea es la conclusión.

REGLAS DE INFERENCIA

$$\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ \underline{A} \\ B \end{array}$$

- **Modus ponens →** permite obtener como conclusión el consecuente de un enunciado condicional, cuando sabemos que el antecedente es el caso. *Ej:* Si María gana la lotería, María se vuelve millonaria. María gana la lotería, María es millonaria.

$$\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ \underline{\text{no } B} \\ \text{no } A \end{array}$$

- **Modus tollens →** permite obtener como conclusión la negación del antecedente de un enunciado condicional, cuando sabemos que el consecuente no es el caso. *Ej:* Si María gana la lotería, María se vuelve millonaria. María no es millonaria, entonces no ganó la lotería.

$$\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ \underline{B \rightarrow C} \\ A \rightarrow C \end{array}$$

- **Silogismo hipotético →** permite obtener como conclusión un condicional, a partir de dos enunciados condicionales que tienen como antecedente del uno y consecuente del otro la misma oración; compuesto por el antecedente del primero, y el consecuente del segundo. *Ej:* Si María gana la lotería, María se vuelve millonaria. Si María se vuelve millonaria, se compraría una casa. Si María gana la lotería, se comprará una casa

$$\dfrac{A \text{ y } B}{A} \qquad \dfrac{A \text{ y } B}{B}$$

- **Simplificación →** permite obtener como conclusión cualquiera de los dos conyuntos de una conjunción. *Ej:* Si María se compró ropa y zapatos, podemos simplificarlo en que María se compró ropa, y que, María se compró zapatos.

$$\begin{array}{c} A \\ \underline{B} \\ A \text{ y } B \end{array}$$

- **Adjunción →** permite obtener como conclusión una conjunción a partir de dos conyuntos. *Ej:* Si María se compró ropa, y María se compró zapatos, podemos adjuntarlo para concluir que María se compró ropa y zapatos

$$\begin{array}{c} A \text{ o } B \\ \underline{\text{no } A} \\ B \end{array}$$

- **Silogismo disyuntivo →** permite obtener como conclusión, a partir de una disyunción y la negación de uno de los disyuntos, el disyunto restante. *Ej:* María compra Prada o Gucci. María no compra Prada. María compra Gucci.

$$\begin{array}{c} \text{Todos los} \\ \text{R son P} \\ \underline{x \text{ es R}} \\ x \text{ es P} \end{array}$$

- **Instanciación del universal →** permite obtener como conclusión una propiedad *(P)* de un individuo *(x)*, a en base a otra propiedad *(R)* que ese individuo posea, a partir de la expresión "todos". *Ej:* Todos los millonarios son arrogantes. María es millonaria. María es arrogante.

PRUEBAS INDIRECTAS

- **Pruebas por absurdo →** es una estrategia demostrativa indirecta, que se aplica cuando el resto son inviables. El procedimiento se basa en suponer que la conclusión que se quiere probar *no es el caso*, y a partir de ello, mediante reglas de inferencia, llegar a una contradicción. Esto probaría que el **supuesto provisional** sería falso, puesto que de otra manera no se habría llegado a una contradicción, y, por lo tanto, la conclusión original sería verdadera.
- Un ejemplo sería que queremos probar que María es arrogante, a partir de las premisas "Si María fuese arrogante, denigraría a la gente de clase baja" y, "Si María fuese arrogante, no denigraría a la gente de clase baja". Para esto, el supuesto provisional será "María no es arrogante"
  1. María no es arrogante
  2. Si María no es arrogante, insulta a la gente de clase baja
  3. Si María no es arrogante, no insulta a la gente de clase baja
  4. Insulta a la gente de clase baja (modus ponens entre 1 y 2)
  5. No insulta a la gente de clase baja (modus ponens entre 1 y 3)
  6. Insulta y no insulta a la gente de clase baja (adjunción entre 4 y 5) → **contradicción**
- Así queda demostrado y concluido que María es arrogante, en base a si insulta y no insulta a la gente de clase baja.

ARGUMENTOS INVÁLIDOS

- Un argumento es **inválido** cuando la verdad de la conclusión no se apoya de la verdad de las premisas. Es decir, cuando hay premisas verdaderas y conclusión falsa, o cuando ambas son verdaderas, pero no se infiere la conclusión de las premisas.
- Un ejemplo de estos argumentos de esta estructura son las **falacias**.

1	2
$A \rightarrow B$	$A \rightarrow B$
B	no A
A	no B

1. **Falacia por afirmación del consecuente →** la conclusión no se infiere de las premisas, por lo que no se puede garantizar la verdad de estas.
2. **Falacia por negación del antecedente →** si bien a conclusión se apoya en las premisas, el hecho de que las premisas sean falsas no es determinante de que la conclusión también deba serlo, por lo que este razonamiento es inválido.

- Para evidenciar que estas estructuras son inválidas, se pueden proponer **contraejemplos**. Estos consisten en un argumento con la estructura correspondiente, que cuente con premisas verdaderas y conclusión falsa.
- En conclusión, la validez de un argumento depende de su forma, la cual siempre se puede determinar, aunque tal vez no pueda determinarse la solidez del argumento.

ARGUMENTOS INDUCTIVOS

- En este tipo de argumentos, las premisas no ofrecen un apoyo absoluto a la conclusión. Es decir, no se habla de validez (pues teóricamente son argumentos inválidos), si no de si es bueno, malo, débil, o fuerte.
  - El criterio de fortaleza de un argumento no es algo único o concreto, si no gradual.
- Dada la verdad de las premisas, la conclusión será más probable, por lo que el argumento será más fuerte.

INDUCTIVOS POR ANALOGÍA

- Se basan en la comparación entre dos o más hechos, y a partir de saber que son iguales en algunos aspectos, se concluye que también lo son en otros. Para su evaluación, los criterios a tener en cuenta son:
  - **Relevancia de los aspectos sobre los que se asienta la analogía:** estos tienen que tener una relación genuina y relevante para el contexto.
  - **Cantidad de aspectos relevantes en los que los casos se parecen:** a más similitud, más fuerza tiene el argumento.
  - **Cantidad de casos relevantes:** cuantas más veces haya sucedido el caso a partir del cual se pretende inferir la conclusión, más fuerte el argumento.

X_1 tiene las características F, G, …, Z.
X_2 tiene las características F, G, …, Z.
…
X_n tiene las características F, G, …
Por lo tanto, X_n tiene la característica Z

- Un ejemplo puede ser: La naranja es un cítrico, y tiene proteínas y vitamina C. El limón es un cítrico, y tiene proteínas y vitamina C. El pomelo es un cítrico. Por lo tanto, el pomelo tiene proteínas y vitamina C.

INDUCTIVOS POR ENNUMERACIÓN INCOMPLETA

- Se basa en la observación de casos como premisas, y se generaliza una conclusión a partir de las mismas. Para su evaluación, los criterios a tener en cuenta son:
  - **Cantidad de casos mencionados en las premisas:** cuanto mayor sea la cantidad, más probable será que la conclusión se dé y más fuerte será el argumento
  - **Que la muestra base sea representativa:** si esta es arbitraria, vuelve el argumento más débil.

X_1 es Z
X_2 es Z
X_3 es Z
X_n es Z
Todos los X son Z

- Un ejemplo puede ser: La naranja es un cítrico, y tiene proteínas y vitamina C. El limón es un cítrico, y tiene proteínas y vitamina C. El pomelo es un cítrico, y tiene proteínas y vitamina C. Por lo tanto, todos los cítricos tienen proteínas y vitamina C.

SILOGISMOS INDUCTIVOS

- Se basa en concluir, en base a una generalización de un caso que cumple con tal propiedad, que un hecho que cumple con tal caso, también tendrá tal propiedad. Para su evaluación, los criterios a tener en cuenta son:
  - **Frecuencia relativa:** cuanto mayor sea la frecuencia en que se da el caso que cumple con tal propiedad, más fuerte será el argumento.
  - **Total de evidencia disponible:** a más propiedades que se relacionen entre sí, más fuerza tiene el argumento.

El n por ciento (o la mayoría, o muchos) de los F son G.
X es F.
Por lo tanto, x es G.

- Un ejemplo puede ser: el 80% de los perros son intolerantes a los cítricos. Zoe es un perro. Por lo tanto, Zoe es intolerante a los cítricos.

SISTEMAS AXIOMÁTICOS

ORIGEN DE LOS PRIMEROS CONOCIMIENTOS GEOMÉTRICOS

- En los primeros documentos encontrados en la Mesopotamia y en Egipto sobre la **geometría prehelénica**, no había métodos de resolución ni articulación entre los conocimientos. El tratamiento de números y figuras era **concreto**, no abstracto, enfocado en la resolución de situaciones cotidianas.
  - Si bien estos conocimientos no integraban un sistema, permitieron la construcción de infraestructura, templos y pirámides, reparticiones de tierra, cálculo de volúmenes, etc.
- En el siglo **VII a.C** en las ciudades griegas de la costa egea del Asia Menor (influenciada vía mar por griegos, egipcios, y cretenses, y vía terrestre por la misma Asia Menor), surgió lo que filósofos llamaron **física** (del griego physis, "naturaleza"), con enfoque en los fenómenos de la naturaleza, independizándose de lo mítico y sobrenatural.
  - Bajo este contexto surgieron pensadores como **Tales de Mileto**, Anaximandro y Anaxímenes. Estos asentaron las bases de lo que hoy llamamos *ciencia*, gracias a que reconocieron la **teoría como organizadora de la práctica**. Concluyeron que todo conocimiento práctico debía poder explicarse bajo una teoría, y así el conocimiento griego y babilónico fue evolucionando hacia un área más abstracta, mientras al mismo tiempo lo integraban en un solo cuerpo de conocimiento.
    - El ya mencionado **Tales** fue uno de los primeros matemáticos y astrólogos griegos, que usaba **métodos deductivos** en la geometría. Es decir, justificar sus enunciados a partir de enunciados ya establecidos, dándole más importancia al método de resolución, que a la solución del problema en sí.

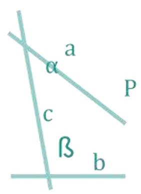
EUCLIDES Y LA GEOMETRÍA

- **Euclides**, nacido entre los años *367 a.C.* y *283 a.C.*, en Alejandría, es considerado el **padre de la matemática**, debido a que **logró sistematizar** (presentar los enunciados relacionados entre sí, deducidos unos de los otros) por primera vez **los conocimientos geométricos**.
  - Su obra **Elementos**, si bien no fue relevante en su momento, fue muy importante para el desarrollo de la geometría, ya que **perfeccionaba y sistematizaba conocimientos geométricos y matemáticos anteriores**, desde una perspectiva aristotélica, según la cual:
    - La **ciencia** es un conjunto de afirmaciones sobre un determinado objeto, con el requisito de que ellas sean generales y verdaderas. Además, deben estar articuladas de un modo orgánico, es decir, mediante un razonamiento lógico, que permita deducir a partir de afirmaciones que se toman como **principios**, de los cuales no se exige demostración (pues son verdades evidentes). En relación a esto, se distingue el vocabulario entre términos primitivos, y los que surgen a partir de ellos.
    - El enfoque euclideano de la geometría no es empírico (como si era el egipcio), ya que no hace referencia a ningún problema concreto.
  - *Elementos* se desarrolla en trece libros, siendo los cuatro primeros referidos a la geometría plana. En el primero, Euclides establece una serie de principios, a partir de los cuales se puede demostrar el resto de los enunciados del sistema. Así, distingue tres tipos de principios: **postulados, nociones comunes, y definiciones**.
  - Los **postulados**, hoy llamados **axiomas**, son aquellos que refieren a una ciencia en particular:
    1. Desde un punto a otro siempre se puede trazar una recta.
    2. Una recta se puede prolongar indefinidamente en cualquiera de sus dos direcciones.
    3. Dado un punto y un segmento, se puede construir un círculo que tenga a ese punto como centro y a ese segmento como radio.
    4. Los ángulos rectos son iguales entre sí.
    5. Si una línea recta corta a otras dos rectas de manera que la suma de los ángulos interiores de un mismo lado sea menor que dos ángulos rectos, entonces dichas rectas, prolongadas suficientemente, se cortarán del mismo lado de la primera línea recta en que se encuentren aquellos ángulos cuya suma es menor que dos rectos. → **postulado de las paralelas**
  - Las **nociones comunes** hacen referencia a cuestiones generales que pueden aplicarse tanto a la geometría, como a otros ámbitos de la ciencia o vida cotidiana.
  - Las **definiciones** implican un desapego del lineamiento aristotélico (según el cual los principios no se definen), con la intención de dar descripciones de los objetos con los que trata la geometría, para así minimizar el margen de error en las demostraciones.
- Euclides obtiene una serie de enunciados a los que llamó **proposiciones** (o **teoremas**). Estos, tienen la estructura de enunciados universales y verdaderos, debido que se obtienen a partir de la deducción de los postulados y nociones comunes.
  - Él construye **demostraciones** de las proposiciones o teoremas, en las que a partir de las premisas deduce la conclusión por reglas de inferencia, sin especificar cuáles usa.

EL PROBLEMA DEL QUINTO POSTULADO

- Si bien los primeros cuatro axiomas eran evidentes, la formulación del quinto es mucho más compleja y poco evidente en comparación. El mismo Euclides parece haber tenido dudas, ya que evitó su uso en las demostraciones.
  - Esta falta de evidencia hizo que los geómetras posteriores a Euclides se planteasen **si su postulado no era, en realidad, un teorema**. Esto implicaría que el quinto postulado no fuese independiente de los otros cuatro, si no, que podría ser demostrado a partir de ellos. Los primeros intentos de esto, se remontan al siglo *I* a.C (Posidonio y Gémino), y se encuentran comentarios sobre el mismo en algunos textos antiguos. Sin embargo, recién en el siglo XVI, con la ciencia activa después de su letargo en Europa, se retomaron los intentos de demostrarlo.

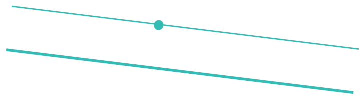
Si la recta c corta a las rectas a y b y la suma de los ángulos α y β es menor que dos rectos ($\alpha + \beta$ es menor que 180°), entonces las rectas a y b se cortan en el punto P.



- Diversos intentos de demostración de esto sucedieron, pero todos fracasaron, debido a que no se partía solo de los cuatro postulados, sino que **se utilizaba otro enunciado, que siempre resultaba equivalente en proposición al quinto postulado**, pretendiendo demostrar un postulado desde otra versión de sí mismo.

- El matemático escocés, **Playfair** (1748-1719), elaboró otra versión del quinto postulado, aún vigente.

Por un punto exterior a una recta, puede trazarse una **única** paralela a dicha recta.



EL TRABAJO DE SACCHERI

- En **1733**, el matemático italiano **Saccheri** (1667-1733) intentó demostrar el quinto postulado mediante una demostración indirecta (o por absurdo), a partir de los otros cuatro postulados. Saccheri usó la formulación de Euclides, pero ahora usamos la de Playfair.
  - Negar que "Por un punto exterior a una recta, pasa una sola paralela a dicha recta", implica dos opciones:
    1. Por un punto exterior a una recta, **no pasa ninguna paralela** → logró contradicciones
    2. Por un punto exterior a una recta, **pasan más de una paralela** → no logró contradicciones, pero como obtuvo teoremas *extraños*, asumió que prácticamente las había encontrado.
  - Saccheri creyó haber vindicado la figura de Euclides, pero si bien en un futuro (siglo XIX) sus investigaciones serían altamente útiles, en su momento fueron rechazadas, debido a que la autoridad de Euclides y el contexto pesaban demasiado como para ser negadas.

GEOMETRÍAS NO EUCLIDEANAS

GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

- El matemático alemán **Gauss** (1777-1855) fue el primero que logró ver la independencia del quinto postulado, reemplazándolo por *"Por un punto exterior a una recta, pueden trazarse **infinitas paralelas** a dicha recta"* (una versión del segundo caso de Saccheri). Con éste, y manteniendo los demás postulados, demostró propiedades y teoremas que no lo llevaban a ninguna contradicción.
  - Gauss solamente dio a conocer su trabajo en **1829** en forma privada, ya que no quería arriesgar el prestigio que había ganado con conclusiones que podrían haber sido consideradas insensatas.
- En **1823**, un matemático húngaro, **Bolyai** (1802-1860), publicó un texto en el que exploraba la hipótesis de **infinitas paralelas**, al igual que Gauss, quien incluso revisó el trabajo.
- En **1826**, el matemático ruso **Lobachevsi** (1792-1856), presentó un trabajo en el que desarrolló un sistema geométrico que usaba los cuatro primeros axiomas de Euclides, y agregaba otro en el que afirmaba la existencia de **infinitas paralelas**, tal como Gauss y Bolyai.
- Esta geometría, que se conoce como **geometría hiperbólica**, incluye teoremas en común con los de Euclides (aquellos deducidos a partir de los cuatro primeros axiomas), y otros que no lo son (aquellos deducidos a partir del quinto postulado), como, por ejemplo, que **la suma de los ángulos interiores de un triángulo es menor a 180°** (la teoría original implicaba que era igual a 180°). Esta geometría se consideró caricaturesca.

GEOMETRÍA ELÍPTICA

- En **1854** **Riemman** (1826-1866) presentó su tesis doctoral ante un jurado integrado, entre otros, por Gauss. En ésta, exploraba la **geometría elíptica**, que surgía a partir de la negación del quinto postulado, suponiendo la **inexistencia de rectas paralelas**. Este sistema implica a su vez, una modificación del segundo postulado, ya que aquí **la recta es cerrada** (en el original es infinita), y esto evitaba las contradicciones halladas por Saccheri. A su vez, se puede probar como teorema que **la suma de los ángulos interiores de un triángulo es mayor a 180°.**

GEOMETRÍAS NO EUCLIDEANAS

- Los dos sistemas propuestos anteriormente, son incuestionables desde una perspectiva lógica. Aun así, en un principio, solo fueron interpretados como muestras del alcance del ingenio e imaginación humanos. Progresivamente, estos sistemas axiomáticos fueron concebidos como **estructuras formales**, que permitían construir estructuras coherentes y **consistentes** (de ellos no deriva una contradicción, de lo contrario serían **inconsistentes**), desde el punto de vista lógico, aunque no hicieran referencia a una entidad concreta.
  - Con el paso del tiempo, estas geometrías encontraron aplicaciones concretas en ramas de la física (atómica y de las estrellas), e incluso en las investigaciones de Einstein (quien las usó para desarrollar las ecuaciones de la teoría de la relatividad).

SISTEMAS AXIOMÁTICOS CONTEMPORÁNEOS

- En un sistema axiomático se encuentran dos categorías de enunciados:
  - **Axiomas** → **enunciados que se aceptan sin demostración** y constituyen puntos de partida de las demostraciones (equivalente a los postulados según Euclides). A diferencia de Aristóteles e Euclides, **no se exige que los axiomas sean verdades evidentes**, ya que, al ser formales, la exigencia de verdad pierde sentido.
  - **Teoremas** → **enunciados que se demuestran**, se obtienen deductivamente a partir de otros enunciados mediante reglas de inferencia, las cuales tienen que ser incluidas en modo explícito, para garantizar la verdad de las conclusiones.
    - **Demostración** → su definición más contemporánea implica una **secuencia finita de pasos** en donde cada uno se deriva de un enunciado anterior, que es o bien un axioma, o bien otro teorema que ya ha sido demostrado.
- Estos enunciados están compuestos por **términos** (**expresiones lingüísticas con significado**), que pueden ser **lógicos**, y **no lógicos** (**específicos del área**, pueden ser **primitivos** y **aceptarse sin definición**, o ser **definidos** **a partir de los primitivos**). Euclides, por ejemplo, no hizo esta distinción, e hizo una definición incluso de términos primitivos.

- Siglos después, el matemático alemán **Hilbert** (1862-1943), desarrolló una nueva sistematización de la geometría euclideana, tomando *punto*, *recta*, y *plano*, como términos primitivos, y los usó para definir otros términos como *paralela*.

- **Reglas de formación** → reglas de los sistemas axiomáticos que **indican cómo combinar diferentes términos para dar lugar a expresiones complejas bien formadas**. Es decir, explican cómo construir sintácticamente los enunciados que cumplirían el rol de axiomas o teoremas.

LA SELECCIÓN DE LOS AXIOMAS

- Es necesario elegir algunos axiomas como punto de partida (sin ofrecer definición), porque si no se puede caer en una **regresión al infinito** (*A se deduce de B, B se deduce de C*, etc.), o un **círculo vicioso** (*A se deduce de B, B se deduce de C, C se deduce de A*, etc.). Entonces, hay que establecer puntos de partida, de los que no cabe preguntarse su verdad hasta que el sistema haya sido **interpretado** (puesto en práctica en un sistema concreto).

PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS AXIOMÁTICOS

- **Independencia** → Un enunciado se dice independiente cuando no puede ser demostrado a partir de los demás enunciados del sistema. **Para que un sistema axiomático sea considerado independiente, todos sus axiomas deben serlo**. Este requisito no es necesario, ya que no supone ninguna objeción lógica, pero es apropiado para poder distinguirlo más fácilmente de los teoremas.
- **Consistencia** → Un sistema se dice consistente cuando **no contiene contradicciones dentro de un mismo sistema**.
- **Completitud** → Un sistema se dice completo cuando **permite demostrar todo lo que está dentro del sistema**, es decir, cuando se garantiza que ninguna verdad queda fuera éste.