ANALISIS A ING Y FCEN FINAL feb 2020	APELLIDO:	SOBRE Nº:
	NOMBRES:	Duración del examen: 90'
TEMA 1 xx/02/20	DNI/CI/LC/LE/PAS. Nº:	CALIFICACIÓN: Apellido del evaluador:

El examen consta de ejercicios para completar en los cuales deberá escribir las respuestas en las líneas punteadas y ejercicios de opción múltiple donde se debe marcar la respuesta correcta (una sola respuesta es correcta en cada ejercicio). El desarrollo de los ejercicios se realizará en hoja borrador que no se entregará para su corrección.

Ejercicio 1. (2 puntos) Calcular $\int \sqrt{x}\ \ln(x)\, dx$

…………………………………………………………………………………

Solución:

Aplicamos método de integración por partes:

$$f = \ln(x) \ \rightarrow \ f' = \frac{1}{x}$$

$$g' = x^{\frac{1}{2}} \ \rightarrow \ g = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$$\int \sqrt{x}\ \ln(x)\, dx = \ln(x)\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \int \frac{1}{x} . \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\, dx =$$

$$\frac{2}{3}\ln(x)\, x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left[\ln(x) - \frac{2}{3}\right] + C$$

Ejercicio 2. (1 punto) Sea f: R $\rightarrow$ R una función con derivadas continuas de orden 10 y $P(x) = x^2 + 3x - 5$ su polinomio de Taylor de orden 2 centrado en x = 1.

Hallar la recta tangente al gráfico de $h(x) = f(x^2) - 4x$ en el punto $(-1; h(-1))$.

……………………………………………………………………………………………………

Solución:

La ecuación de la recta tangente al gráfico de h es: $y = h(-1) + h'(-1)(x+1)$

Pero $h(-1) = f(1) + 4 = p(1) + 4 = -1 + 4 = 3$

Y $h'(x) = f'(x^2)2x - 4$

Entonces: $h'(-1) = f'(1)2(-1) - 4 = -2\,f'(1) - 4 = -2\,p'(1) - 4$

Como $p'(x) = 2x + 3$, entonces $p'(1) = 2 + 3 = 5$

Por lo tanto $h'(1) = -10 - 4 = -14$

Respuesta:

La ecuación de la recta tangente pedida es $y = -14x - 11$

Ejercicio 3. Sea f: D $\to$ R definida por $f(x) = \frac{\ln x}{x-2}$

a) (1 punto) Determinar todas las asíntotas de la función f:

☐	$y = 0, x = 2$	☐	$y = 0, x = 0$
☐	$y = 0, x = 2, x = 0$	☐	$y = x, x = 2$
☐	$y = 2, x = 0$	☐	$x = 2$

b) (1 punto) Calcular f´(1): ………………………………………….…

Solución:
Dominio $= (0; 2) \cup (2; +\infty)$
Calculamos: $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ hay indeterminación "∞/∞", aplicamos L´Hopital:
$\lim_{x \to ++\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$ de aquí $y = 0$ es asíntota horizontal (no hay asíntota oblicua)
Ahora: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to 2} f(x) = \pm\infty$
Por lo tanto $x = 0$ y $x = 2$ son asíntotas verticales
Todas las asíntotas son: $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x-2)-\ln(x).1}{(x-2)^2} \quad\rightarrow\quad f'(1)=-1$$

Ejercicio 4. (1 punto) Sea la función f definida por

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & si\ \ x\neq 0\\ 3 & si\ \ x=0\end{cases}\text{, entonces el }\lim_{x\to 0} f(x)$$

☐	$No\ existe$	☐	$Vale\ 1$
☐	$Vale-1$	☐	$Vale\ 3$

Solución:

Como en el límite x tiende a cero pero nunca llega a ese valor tenemos que analizar en la fórmula $\frac{|x|}{x}$. Si x tiende a cero por el lado derecho (es positivo) el límite nos da 1, pero si tiende por el lado izquierdo (es negativo) el límite nos da – 1. Como los límites laterales no coinciden, entonces no existe el límite.

Ejercicio 5. (1 punto) Sea $f: D\rightarrow R$ una función derivable. Sabiendo que la recta tangente al gráfico de f en $x=1$ tiene ecuación $y=3x+2$, calcular:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(4x-3)-5}{x^2-1}= \text{......................................}$$

Solución:

Por la ecuación de la recta tangente sabemos que $f'(1)=3$ y $f(1)=5$

Con esto último vemos que el límite pedido es una indeterminación "0/0", podemos usar L´Hopital, $\lim_{x\to 1}\frac{f'(4x-\ \ ).4}{2x}=2f'(1)=6$

Ejercicio 6. (1 punto) Indicar el valor de $\int_1^5 g(t)dt$ sabiendo que $\int_1^5(3g(t)-2t+1)dt=8$

....

Solución:

$$\int_1^5 (3g(t) - 2t + 1)dt = \int_1^5 3\ g(t)\ dt - \int_1^5 2t\ dt\ + \int_1^5 1\ dt\ = 8$$

Calculamos aparte las dos últimas integrales:

$$\int_1^5 2t\ \ dt = t^2|_1^5 = 25 - 1 = 24$$

$$\int_1^5 1\ \ dt = t|_1^5 = 5 - 1 = 4$$

Entonces:

$$\int_1^5 3\ g(t)\ dt - 24 + 4 = 8$$

$$\int_1^5 3\ g(t)\ dt = 3\int_1^5 \ g(t)\ dt = 24 - 4 + 8 = 28$$

Por lo tanto:

$$\int_1^5 \ g(t)\ dt = 28/3$$

Ejercicio 7. (1 punto) Calcular la suma $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n}+3}{5^{n+1}}$

☐	7/4	☐	67/100
☐	25/4	☐	19/20
☐	35/12	☐	5/3

Solución:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n}+3}{5^{n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n}}{5^{n+1}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{5^{n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{5^n\ 5} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{5^n\ 5} = \frac{1}{5}\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n + \frac{3}{5}\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$=$$

$$\frac{1}{5}\,\frac{1}{1-4/5}+\frac{3}{5}\,\frac{1}{1-1/5}-\left(\frac{4}{5}+\frac{7}{25}\right)=\frac{1}{5}\,5+\frac{3}{5}\,\frac{5}{4}-\frac{27}{25}=\frac{67}{100}$$

Ejercicio 8. (1 punto) El área encerrada por el gráfico de la función $f(x) = (x^2 - 1).(x + 2)$ y el eje x es:

………………………………………………………………………………………………..

Solución:

La función corta al eje x en tres puntos: -2, -1 y 1, debemos ver en cada intervalo si la función es positiva o negativa para determinar la integral que calcule el área:

$$\int_{-2}^{-1} f(x)dx - \int_{-1}^{1} f(x)dx = \left(\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right|_{-2}^{-1} - \left(\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right|_{-1}^{1} = \frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$$