ANALISIS A INGENIERIA Y FCEN REC 1P 2C 2019	APELLIDO:	SOBRE Nº:
	NOMBRES:	Duración del examen: 90'
TEMA 1 3/12/19	DNI/CI/LC/LE/PAS. Nº:	CALIFICACIÓN: Apellido del evaluador:

Ejercicios para completar: escribir la respuesta en las líneas punteadas. Ejercicios de opción múltiple: hay una sola respuesta correcta, marcarla claramente. Los desarrollos de los ejercicios no serán entregados para la corrección.

Ejercicio 1. (2 puntos) Dada la función f definida por $f(x) = \left(1 + tg(x^2)\right)^{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\Big(\underbrace{1+tg(x^2)}_{x\to 1}\Big)^{\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to\infty}} = \lim_{x\to 0}\Big(\underbrace{1+tg(x^2)}_{x\to 1}\Big)^{\frac{1}{tg(x^2)}\frac{\overbrace{tg(x^2)}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{->0}}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\underbrace{\left[\Big(\underbrace{1+tg(x^2)}_{x\to 1}\Big)^{\frac{1}{tg(x^2)}}\right]^{\frac{\overbrace{tg(x^2)}^{\to 1}}{x^2}\underbrace{x}_{->0}}}_{\to e} = 1$$

Ejercicio 2. (2 puntos) Dada la función f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x}} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ \frac{1-\cos(x)}{x^2} & x < 0 \end{cases}$

a. Es continua en x=0
b. Es discontinua evitable en x=0
c. Posee una asíntota vertical en x=0
d. Es discontinua con salto finito en x=0

Solución:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{\sqrt{x+9}-3}^{\to 0}}{\underbrace{\sqrt{x}}_{\to 0}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{\sqrt{x+9}-3}^{\to 0}}{\underbrace{\sqrt{x}}_{\to 0}}\,\frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x+9-9}{\sqrt{x}}\,\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{x}}\,\frac{1}{\sqrt{x+9}+3} = \lim_{x\to 0^+}\underbrace{\sqrt{x}}_{\to 0}\left[\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}}_{\to 1/6}\right] = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{1-\cos(x)}^{\to 0}}{\underbrace{x^2}_{\to 0}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{1-\cos(x)}^{\to 0}}{\underbrace{x^2}_{\to 0}} \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{1-\cos^2\ (x)}^{\to 0}}{\underbrace{x^2}_{\to 0}} \frac{1}{1+\cos(x)} = \lim_{x\to 0^-} \left[\underbrace{\frac{\operatorname{sen}^2\ (x)}{x^2}}_{\to 1}\right] \underbrace{\frac{1}{1+\cos(x)}}_{1/2}$$

$$= 1/2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)\ \neq f(0)\ entonces\ f\ es\ discontinua\ con\ salto$$

$$finito\ en\ x = 0$$

Ejercicio 3. Sea la función g definida por $g(x) = -\ln\,(x^2-9)$, entonces:

a) (1 punto) El domino de g es:

☐	$(-\infty,-3)U(3,+\infty)$	☐	(-3,3)
☐	$[-3,3]$	☐	$(-\infty,-3)$
☐	$(-\infty,-3]U[3,+\infty)$	☐	$(3,+\infty)$

b) (1 punto) La ecuación de recta tangente en x = 4 es:

……………………………………………………………………………………………………

Solución.

a) Para calcular el dominio hay que pedir que $x^2-9>0$, si hacemos el gráfico de la parabola, podemos observar que esto se cumple en el intervalo $(-\infty,-3)U(3,+\infty)$

b) Para encontrar la recta tangente es necesario encontrar la pendiente. Para esto hay que derivar y evaluar en 4:

$$g'(x) = -\frac{2x}{x^2-9} \to g'(4) = -\frac{8}{7}$$

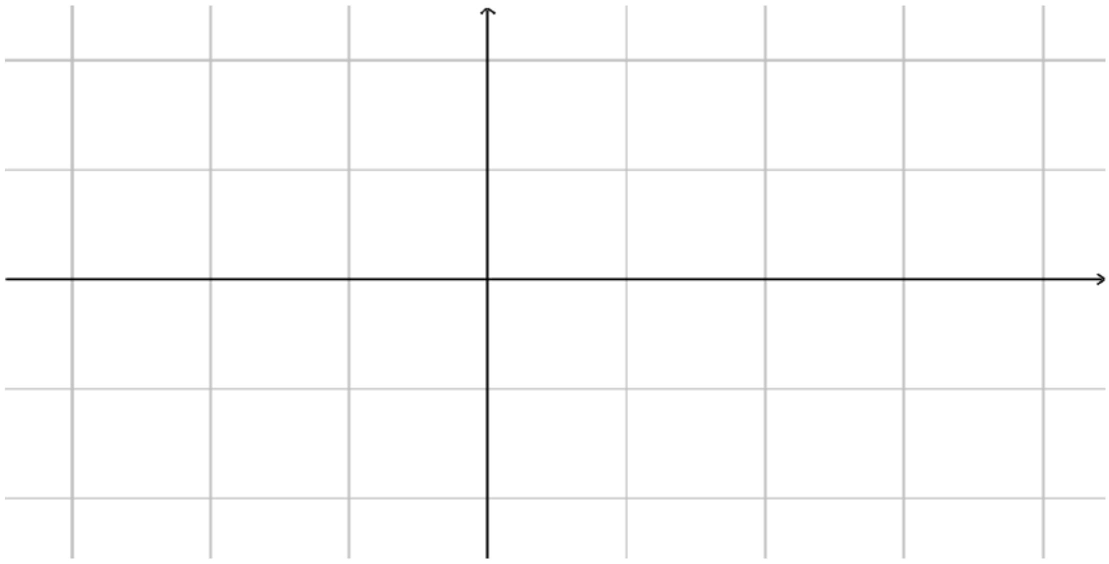
Luego, buscamos el punto de tangencia:

$$g(4) = -\ln(7) \to punto\ de\ tangencia: (4,-\ln(7))$$

En conclusión, la recta tangente es:

$$y+\ln(7) = -\frac{8}{7}(x-4)$$

Ejercicio 4. (2 puntos) Hacer un gráfico aproximado de $f(x) = -e^{-2(x-3)^2}+2$ marcando los puntos (x; y) extremos



Solución:

El dominio es R. Buscamos los puntos extremos:

$$f'(x) = 4(x-3)e^{-2(x-3)^2}$$

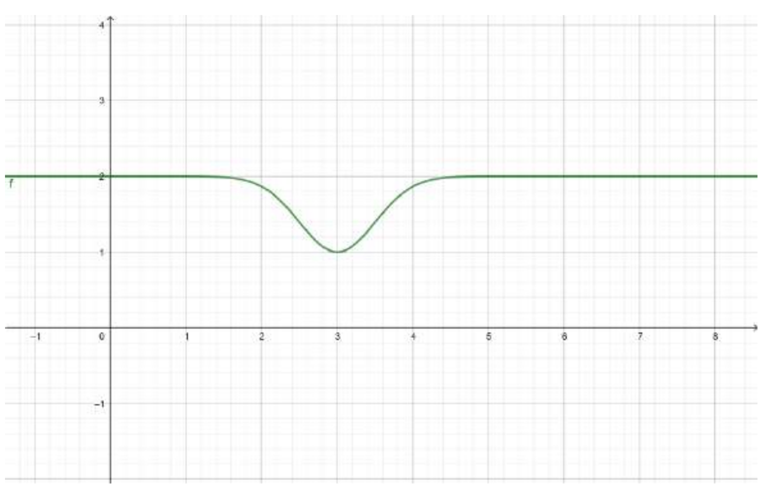
$$f'(x) = 0 \leftrightarrow x = 3$$

En el intervalo $(-\infty: 3)$ f´ es negativa por lo tanto f decrece

En el intervalo $(3: +\infty)$ f´ es positiva por lo tanto f crece

Hay un mínimo en x = 3, valor mínimo en (3; 1)

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$ por lo tanto hay asíntota horizontal en y = 2



Ejercicio 5. (1 punto) Sea la función f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{cos^2(2x)-1}{x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$,

entonces, para que sea continua en x = 0:

a) a = 0
b) a = 1
c) a = 2
d) a = 4
e) a = - 4
f) No existe ningún valor de a para que la función sea continua en x = 0

Solución:

Para que f sea continua en x = 0:

$$\lim_{x\to 0}\frac{cos^2(2x)-1}{x^2}=a$$

Usando igualdades trigonométricas:

$$\lim_{x\to 0}\frac{cos^2(2x)-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-sen^2(2x)-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-sen^2(2x)}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-sen(2x).sen(2x)}{x.x}=\lim_{x\to 0}\frac{-sen(2x).sen(2x).4}{2x.2x}=-4$$

Por lo tanto, la opción correcta es la e)

Ejercicio 6. (1 punto) Sea la función f definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{sen^2(2x)}{x}+x & x>0\\ 0 & x=0\\ x^2+4x+sen(x) & x<0\end{cases}$$

entonces $f\,'(0)$:

a) No existe
b) Vale 0
c) Vale 1
d) Vale 3
e) Vale 4
f) Vale 5
g) Vale ∞

Solución:

Calculamos la derivada por definición:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$$

Este límite se abre en dos casos: 1) si h es positivo, 2) si es negativo:

1) h positivo

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{sen^2(2h)}{h}+h}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{sen^2(2h)+h^2}{h}}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{sen^2(2h)+h^2}{h^2}=\lim_{h\to 0^+}\frac{sen^2(2h)}{h^2}+\frac{h^2}{h^2}=$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{sen(2h).sen(2h)}{h.h}+\frac{h^2}{h^2}=\lim_{h\to 0^+}\frac{4.sen(2h).sen(2h)}{2h.2h}+\frac{h^2}{h^2}=4+1=5$$

2) h negativo

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{h^2 + 4h + sen(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2}{h} + \frac{4h}{h} + \frac{sen(h)}{h} = 0 + 4 + 1 = 5$$

Como coinciden los límites laterales, la derivada existe y vale 5 (respuesta f).