ANÁLIS. MAT. ING. - EXACTAS 2C 2017 UBAXXI TEMA 1 - 25-10-17	APELLIDO:	SOBRE Nº:
	NOMBRES:	Duración del examen: 2 hs
	DNI/CI/LC/LE/PAS. Nº:	CALIFICACIÓN:
	E-MAIL:	
	TELÉFONOS part: cel:	Apellido del evaluador:

Ej 1. (2 puntos) Sea $f(x) = 2e^{-4x+5} + 8$, entonces:

a) **La función inversa de f es**: $f^{-1}(x) = -\frac{1}{4} ln(\frac{x-8}{2}) + \frac{5}{4}$

Para hallar $f^{-1}(x)$, planteamos

$y = 2e^{-4x+5} + 8$ despejamos x

Entonces $\frac{y-8}{2} = e^{-4x+5}$ aplicamos logaritmo natural a ambos miembros y nos queda

$ln\ (\frac{y-8}{2}) = -4x+5$ despejando x obtenemos

$\frac{ln(\frac{y-8}{2}) - 5}{-4} = x$, como $x = f^{-1}(y)$, cambiamos y por x , entonces

$$f^{-1}(x) = -\frac{1}{4} ln(\frac{x-8}{2}) + \frac{5}{4}$$

b**) El dominio de f^{-1} es:** $(8, +\infty)$

Como se trata de una función logarítmica, para hallar el dominio pedimos que

$\frac{x-8}{2} > 0$ entonces

$x-8>0$

$x > 8$

Domf = $(8,+\infty)$

c) **La imagen de f $^{-1}$ es:** R

El conjunto Imagen de f $^{-1}$ es el Domf. Como f es una función exponencial compuesta con una lineal, entonces el Domf: R, por lo tanto el conjunto Im f $^{-1}$: R

d) **La ecuación de la recta tangente al gráfico de f en x = 5/4 es**: $y=-8x+20$

Para hallar la ecuación de la recta tangente a f(x) en x = 5/4 , calculamos

f(5/4) reemplazando las x en f por 5/4, así obtenemos

$$f(5/4)=2e^{-4.\frac{5}{4}+5}+8=10$$

Para hallar la pendiente de la recta tangente calculamos f ´(x)

$$f'(x)=2e^{-4x+5}(-4)=(-8)e^{-4x+5}$$

Evaluamos la derivada en x = 5/4 y obtenemos que

$$m= f'(5/4)=(-8)e^{-4\frac{5}{4}+5}=-8$$

Como la recta tiene ecuación $y-10=-8(x-\frac{5}{4})$, entonces

$y=-8x+20$

Ejercicios a desarrollar

Ej 2. (2 puntos) Sea $f(x)=\begin{cases} \frac{\cos(2x)-1}{3x^2} & si \quad x\neq 0 \\ -2/3 & si \quad x=0 \end{cases}$ Estudiar continuidad y derivabilidad en x = 0.

Para analizar continuidad en x = 0, debemos estudiar las tres condiciones de continuidad

a) ¿Existe f(0)?

f(0) = -2/3 por definición de f(x)

b) ¿Existe límite cuando x->0?

Para esta función los límites laterales cuando x tiende a cero son iguales, porque la función tiene la misma fórmula a izquierda y a derecha de x = 0, y su comportamiento no cambia si x tiende a 0 por derecha o por izquierda. Calculamos entonces

$lim_{x\to 0}\frac{cos(2x)-1}{3x^2}$ queda una indeterminación del tipo 0/0, podemos, o bien usar propiedades de funciones trigonométricas, o aplicar Regla de L´Hopital

Aplicando Regla de L´Hopital queda:

$lim_{x\to 0}\frac{cos(2x)-1}{3x^2}=lim_{x\to 0}\frac{-2sen(2x)}{6x}$, como vuelve a quedar una indeterminación del tipo 0/0 ,si aplicamos nuevamente Regla de L´Hopital (también podríamos aplicar propiedades para límites indeterminados con funciones trigonométricas) y obtenemos

$$lim_{x\to 0}\frac{cos(2x)-1}{3x^2}=lim_{x\to 0}\frac{-2sen(2x)}{6x}=lim_{x\to 0}\frac{-4cos(2x)}{6}=-\frac{2}{3}$$

Por lo tanto el límite buscado existe y vale -2/3.

c) ¿f(0)= $lim_{x\to 0}\ f(x)$?

Como f(0) = -2/3 y $\lim_{x \to 0} f(x)$ =- 2/3, se cumple esta condición

Por lo tanto f es continua en x = 0

Analicemos derivabilidad de f en x = 0. Para ello calculamos la derivada de f (x) en x = 0 por definición

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{\cos(2h) - 1}{3h^2} + \frac{2}{3}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\cos(2h) - 1 + 2h^2}{3h^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(2h) - 1 + 2h^2}{3h^3}$$

Este límite es una indeterminación del tipo 0/0, si aplicamos regla de L´Hopital nos queda

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(2h) - 1 + 2h^2}{3h^3} = \lim_{h \to 0} \frac{-2sen(2h) + 4h}{9h^2}$$

Este límite es una indeterminación del tipo 0/0. Aplicando Regla de L´Hopital queda:

$$\lim_{h \to 0} \frac{-2sen(2h) + 4h}{9h^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-4\cos(2h) + 4}{18h}$$

Como vuelve a dar indeterminación del tipo 0/0, por L´Hopital da:

$$\lim_{x \to 0} \frac{-4\cos(2h) + 4}{18h} = \lim_{x \to 0} \frac{8sen(2h)}{18} = 0$$

Como el límite para h tendiendo a cero por derecha y por izquierda da el mismo resultado, y el límite existe y es finito, entonces **f es derivable en x=0 y f´(0)=0**

Ej 3. Sea $f(x) = 2 + \frac{5}{x^2 - 6x}$. Analizar:

a) (1 punto) Dominio y raíces.

b) (2 puntos) Analizar asíntotas horizontales, verticales y oblicuas.

c) (2 puntos) Indicar intervalos de crecimiento y decrecimiento, y extremos relativos.

d) (1 punto) Con la información obtenida en los puntos anteriores, realizar un gráfico aproximado de la función.

a) Para el Dominio de f(x) pedimos que $x^2 - 6x \neq 0$

Buscamos x / $x^2 - 6x = 0$ y da $x = 0$ y $x = 6$, por lo tanto

$Dom f = R - \{0{,}6\}$

Para hallar las raíces o ceros planteamos f(x)=0

$$2 + \frac{5}{x^2 - 6x} = 0 \Rightarrow \frac{5}{x^2 - 6x} = -2 \Rightarrow 5 = -2(x^2 - 6x)$$

$2x^2 - 12x + 5 = 0$, las raíces de esta cuadrática son : $x_{1,2} = \dfrac{12 \pm \sqrt{104}}{4}$

es decir $x_1 = \dfrac{12 - 10{,}19}{4} \approx 0{,}45$ $\quad x_2 = \dfrac{12 + 10{,}19}{4} \approx 5{,}55$

$C_0 = \{ \ 3 - \frac{1}{2}\sqrt{26}; 3 + \frac{1}{2}\sqrt{26} \ \}$

b) Para hallar asíntota vertical calculamos los límites laterales para los puntos que sacamos del Dominio de f

Para x = 0

$$lim_{x \to 0^-} \quad 2 + \frac{5}{x^2 - 6x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \quad 2+\frac{5}{x^2-6x}=-\infty$$ por lo tanto **x = 0 es asíntota vertical**

Para x = 6

$$\lim_{x\to 6^-} \quad 2+\frac{5}{x^2-6x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 6^+} \quad 2+\frac{5}{x^2-6x}=+\infty$$ por lo tanto **x = 6 es asíntota vertical.**

Para asíntota horizontal calculamos

$$\lim_{x\to -\infty} \quad 2+\frac{5}{x^2-6x}=2$$

$$\lim_{x\to +\infty} \quad 2+\frac{5}{x^2-6x}=2$$ por lo tanto **y = 2 es asíntota horizontal**

Como hay asíntota horizontal si $x\to+\infty$ y si $x\to-\infty$, entonces no hay asíntota oblicua

c) Para hallar intervalos de crecimiento y decrecimiento de f calculamos f´(x) e igualamos a cero

$$f'(x)=\frac{-5(2x-6)}{(x^2-6x)^2}=0\Rightarrow x=3$$, por lo tanto x = 3 es un Punto Crítico

aplicando el Teorema de Bolzano para f´(x) , teniendo en cuenta los puntos que sacamos del Dominio de f y de f´ , obtenemos:

Si x<0 f´(x)>0 f crece

Si $0<x<3$ $f´(x)>0$ f crece

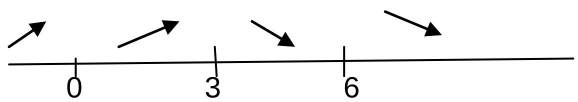
Si $3<x<6$ $f´(x)<0$ f decrece

Si $x>6$ $f´(x)<0$ f decrece

Por lo tanto :

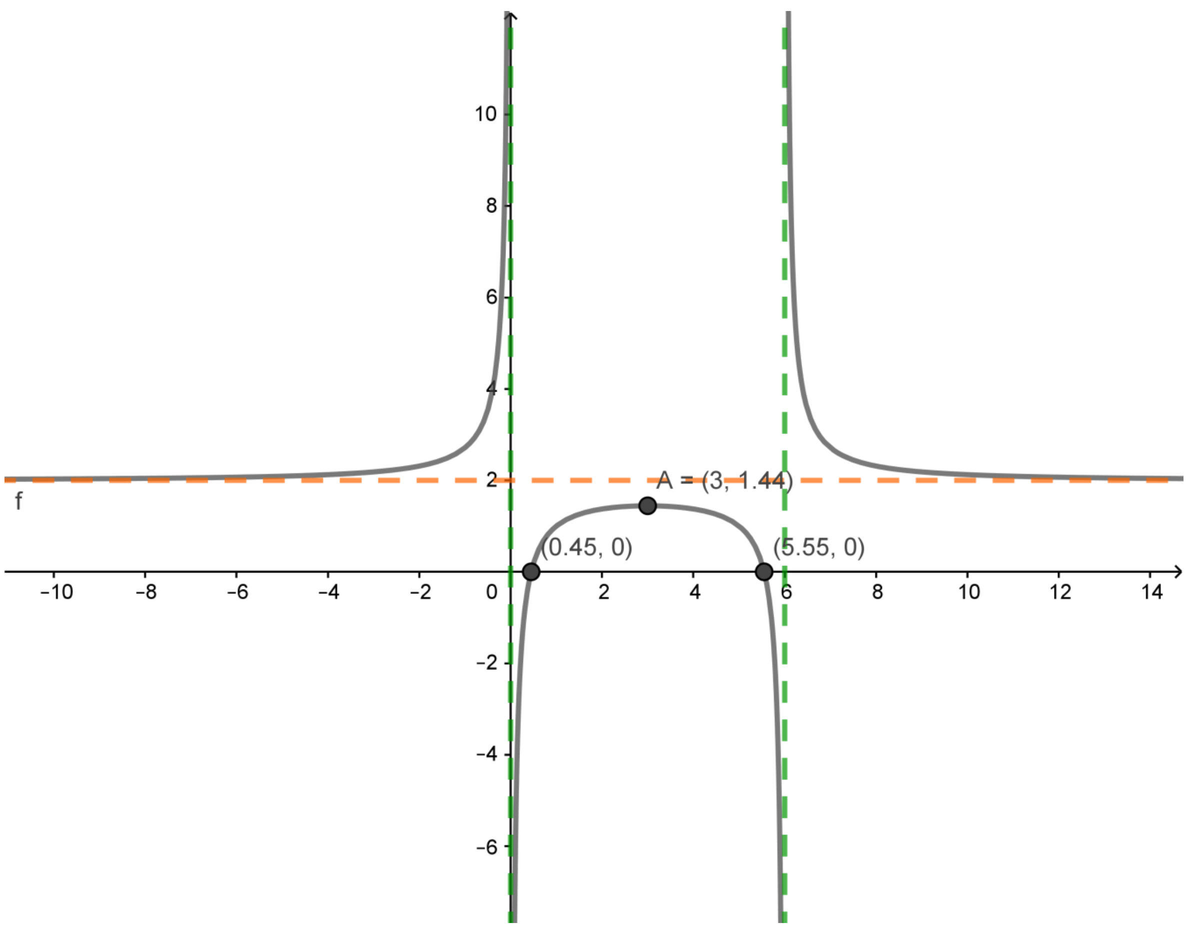
Intervalo de decrecimiento de f: $(3,6)\,U(6,+\infty)$

Intervalo de crecimiento de f: $(-\infty,0)\,U(0,3)$



En x = 3 hay un máximo relativo y vale f(3) = 13/9

d)



<table>
<tr><td rowspan="5">ANÁLIS. MAT.
ING. - EXACTAS
2C 2017
UBAXXI
TEMA 2 - 25-10-17</td><td>APELLIDO:</td><td>SOBRE Nº:</td></tr>
<tr><td>NOMBRES:</td><td>Duración del examen: 2 hs</td></tr>
<tr><td>DNI/CI/LC/LE/PAS. Nº:</td><td rowspan="2">CALIFICACIÓN:</td></tr>
<tr><td>E-MAIL:</td></tr>
<tr><td>TELÉFONOS part: cel:</td><td>Apellido del evaluador:</td></tr>
</table>

Ej 1. (2 puntos) Sea $f(x) = 3e^{-2x+1} + 5$, entonces:

a) **La función inversa de f es**: $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2} ln(\frac{x-5}{3}) + \frac{1}{2}$

Para hallar $f^{-1}(x)$, planteamos

$y = 3e^{-2x+1} + 5$ y despejamos x

Entonces $\frac{y-5}{3} = e^{-2x+1}$ aplicamos logaritmo natural a ambos miembros

$ln\ (\frac{y-5}{3}) = -2x + 1$ despejando x obtenemos

$\frac{ln(\frac{y-5}{3}) - 1}{-2} = x$, como x = $f^{-1}(y)$, cambiamos y por x , entonces

$$f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-5}{3}\right) + \frac{1}{2}$$

b) **El dominio de f $^{-1}$ es:** $(5, +\infty)$

Como se trata de una función logarítmica, para hallar el dominio pedimos que

$\frac{x-5}{3} > 0$ entonces

$x - 5 > 0$

$x > 5$

Domf = $(5, +\infty)$

c) La imagen de f $^{-1}$ es: R

El conjunto Imagen de f $^{-1}$ es el Domf. Como f es una función exponencial compuesta con una lineal, entonces el Domf: R, por lo tanto el conjunto Im f $^{-1}$: R

d) **La ecuación de la recta tangente al gráfico de f en x = 1/2 es**: $y = -6x + 11$

Para hallar la ecuación de la recta tangente a f(x) en x = 1/2 , calculamos

f(1/2) reemplazando x en f por 1/2, así obtenemos

$$f(1/2) = 3e^{-2.\frac{1}{2}+1} + 5 = 8$$

Para hallar la pendiente de la recta tangente calculamos f ´(x)

$$f´(x) = 3e^{-2x+1}(-2) = (-6)e^{-2x+1}$$

Evaluamos la derivada en x = 1/2 y obtenemos que

$$m = f'(1/2) = (-6)e^{-2\frac{1}{2}+1} = -6$$

Como la recta tiene ecuación $y-8 = -6(x-\frac{1}{2})$, entonces

$$y = -6x + 11$$

Ejercicios a desarrollar

Ej 2. (2 puntos) Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(3x) - 1}{2x^2} & si \quad x \neq 0 \\ -9/4 & si \quad x = 0 \end{cases}$ Estudiar continuidad y derivabilidad en x = 0.

Para analizar continuidad en x = 0, debemos estudiar las tres condiciones de continuidad

a) ¿Existe f(0)?

f(0) = -9/4 por definición de f(x)

b) ¿Existe límite cuando x->0?

Para esta función los límites laterales cuando x tiende a cero son iguales, porque la función tiene la misma fórmula a izquierda y a derecha de x = 0 y su comportamiento no cambia si x tiende a 0 por derecha o por izquierda. Calculamos entonces

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(3x)-1}{2x^2}$ queda una indeterminación del tipo 0/0, podemos, o bien usar propiedades de funciones trigonométricas, o aplicar Regla de L´Hopital

Aplicando Regla de L´Hopital queda:

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(3x)-1}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{-3sen(3x)}{4x}$, como vuelve a quedar una indeterminación del tipo 0/0, si aplicamos nuevamente Regla de L´Hopital (podríamos usar propiedades dle límite para indeterminaciones con funciones trigonométricas) ,obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{-3sen(3x)}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{-9\cos(3x)}{4}=-\frac{9}{4}$$

Por lo tanto el límite buscado existe y vale -9/4.

c) ¿f(0)= $\lim_{x\to 0} f(x)$?

Como f(0) = -9/4 y $\lim_{x\to 0} f(x)$=- 9/4, se cumple esta condición

Por lo tanto f es continua en x = 0

Analicemos derivabilidad de f en x = 0. Para ello calculamos la derivada de f (x) en x = 0 por definición

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\cos(3h)-1}{2h^2}+\frac{9}{4}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2\cos(3h)-2+9h^2}{4h^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos(3h)-2+9h^2}{4h^3}$$

Este límite es una indeterminación del tipo 0/0, si aplicamos regla de L´Hopital nos queda

$$\lim_{h\to 0}\frac{2\cos(3h)-2+9h^2}{4h^3}=\lim_{h\to 0}\frac{-6sen(3h)+18h}{12h^2}$$

Este límite es una indeterminación del tipo 0/0. Aplicando Regla de L´Hopital queda:

$$\lim_{h\to 0}\frac{-6sen(3h)+18h}{12h^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-18\cos(3h)+18}{24h}$$

Como vuelve a dar indeterminación del tipo 0/0, por Regla de L´Hopital da:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-18\cos(3h)+18}{24h}=\lim_{x\to 0}\frac{54sen(3h)}{24}=0$$

Como el límite para h tendiendo a cero por derecha y por izquierda da el mismo resultado, y el límite existe y es finito, entonces **f es derivable en x=0 y f´(0)=0**

Ej 3. Sea $f(x)=3+\dfrac{2}{x^2-4x}$. Analizar:

a) (1 punto) Dominio y raíces.

b) (2 puntos) Analizar asíntotas horizontales, verticales y oblicuas.

c) (2 puntos) Indicar intervalos de crecimiento y decrecimiento, y extremos relativos.

d) (1 punto) Con la información obtenida en los puntos anteriores, realizar un gráfico aproximado de la función.

a) Para el Dominio de f(x) pedimos que $x^2-4x\neq 0$

Buscamos x / $x^2-4x=0$ y da $x=0$ y $x=4$, por lo tanto

$Dom f = R-\{0,4\}$

Para hallar las raíces o ceros igualamos f(x)=0

$$3+\frac{2}{x^2-4x}=0 \Rightarrow \frac{2}{x^2-4x}=-3 \Rightarrow 2=-3(x^2-4x)$$

$3x^2-12x+2=0$, las raíces de esta cuadrática son : $x_{1,2}=\dfrac{12\pm\sqrt{120}}{6}$

es decir $x_1=\dfrac{12-10,95}{6}\approx 0,17$ $\quad x_2=\dfrac{12+10,95}{6}\approx 3,83$

$C_0 = \left\{\, 2-\frac{1}{3}\sqrt{30}, 2+\frac{1}{3}\sqrt{30} \,\right\}$

b) Para hallar asíntota vertical calculamos los límites laterales para los puntos que sacamos del Dominio de f

Para x = 0

$$\lim_{x \to 0^-} \quad 3 + \frac{2}{x^2 - 4x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \quad 3 + \frac{2}{x^2 - 4x} = -\infty$$ por lo tanto **x = 0 es asíntota vertical**

Para x = 4

$$\lim_{x \to 4^-} \quad 3 + \frac{2}{x^2 - 4x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 4^+} \quad 3 + \frac{2}{x^2 - 4x} = +\infty$$ por lo tanto **x = 4 es asíntota vertical.**

Para asíntota horizontal calculamos

$$\lim_{x \to -\infty} \quad 3 + \frac{2}{x^2 - 4x} = 3$$

$$\lim_{x \to +\infty} \quad 3 + \frac{2}{x^2 - 4x} = 3$$ por lo tanto **y = 3 es asíntota horizontal**

Como hay asíntota horizontal si $x \to +\propto$ y si $x \to -\infty$, entonces no hay asíntota oblicua

c) Para hallar intervalos de crecimiento y decrecimiento de f calculamos f´(x) e igualamos a cero

$$f´(x) = \frac{-2(2x-4)}{(x^2-4x)^2} = 0 \Rightarrow x = 2$$, por lo tanto x = 2 es un Punto Crítico

aplicando el Teorema de Bolzano para f´(x) , teniendo en cuenta los puntos que sacamos del Dominio de f , obtenemos

Si x<0 f´(x)>0 f crece

Si 0<x<2 f´(x)>0 f crece

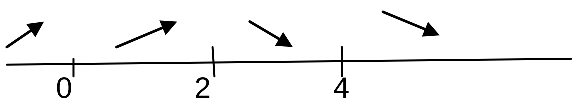
Si 2<x<4 f´(x)<0 f decrece

Si x>4 f´(x)<0 f decrece

Por lo tanto :

Intervalo de decrecimiento de f: $(2,4)\,U(4,+\infty)$

Intervalo de crecimiento de f: $(-\infty,0)\,U(0,2)$



En x = 2 hay un máximo relativo y vale f(2)= 5/2

d)