ANÁLIS. MATE. ING. - EXAC. 1F2C2016 **TEMA 1 - 14-12-16** UBA XXI	APELLIDO:	SOBRE Nº:
	NOMBRES:	Duración del examen: 2 hs
	DNI/CI/LC/LE/PAS. Nº:	CALIFICACIÓN:
	E-MAIL:	
	TELÉFONOS part: cel:	Apellido del evaluador:

Completar con letra clara, mayúscula e imprenta

El examen cuenta con dos ejercicios de opción múltiple y un ejercicio a desarrollar. El puntaje se indica en cada caso. En los ejercicios de opción múltiple únicamente se corregirá la opción marcada. Por el contrario, en los ejercicios a desarrollar, se corregirá tanto el resultado como el desarrollo que condujo al mismo, pues ambos forman parte del puntaje.
El examen tiene que ser entregado en tinta y no se permite el uso de teléfonos móviles ni de calculadoras.
Copie sus resoluciones en una hoja que será entregada por el personal de UBA XXI para comparar con los criterios de corrección que estarán disponibles en la solapa "Evaluación" del campus virtual de la materia.

A. Ejercicios de opción múltiple.

Cada ejercicio de opción múltiple vale **1 punto**. Se debe elegir una ÚNICA respuesta correcta. Si se escribe más de una opción se considerará inválida la respuesta. No se tendrá en cuenta el desarrollo del ejercicio.

1) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}+3^{n+1}}{5^n}$ converge a

☐ 25 / 2 ☐ 55 / 6 ■ 17 / 2 ☐ Ninguna de las otras es válida

Son dos geométricas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}+3^{n+1}}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{5^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3.3^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n + 3\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n =$$

Pero ojo que no empieza en 0, sino en 1. Entonces hay que restar el primer término:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n + 3\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{1}{1-4/5} + 3.\frac{1}{1-3/5} - (1+3) = \frac{1}{1/5} + \frac{3}{2/5} - 4 = 5 + \frac{15}{2} - 4 = 17/2$$

2) Sea $f(x) = e^{x^2+1}$, en x = 0

☐ El polinomio de Taylor de grado 2 de f es p(x) = e – 2e x²

■ f tiene un mínimo relativo

☐ f tiene un máximo relativo

☐ Ninguna de las otras es correcta

$$f(x)=e^{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad f(0)=e$$

$$f'(x)=e^{x^2+1}.2x \quad \Rightarrow \quad f'(0)=0$$

$$f''(x)=e^{x^2+1}.2x.2x+e^{x^2+1}.2 \quad \Rightarrow \quad f''(0)=0+2e=2e$$

Entonces, el polinomio de Taylor de grado 2, en x = 0 es:

$$p(x)=e+0(x-0)+\frac{1}{2}2e(x-0)^2=e+ex^2$$

Y, como la primera derivada en x = 0 es nula, y la segunda positiva, entonces tiene un mínimo relativo en x = 0.

B. Ejercicios a desarrollar

El ejercicio a desarrollar suma **8 puntos**. Todas las respuestas deben estar debidamente JUSTIFICADAS. No se aceptarán cálculos dispersos o poco claros.

1) Dadas la función $f(x)=e^{2x-3}$ y la sucesión $a_n=\left(1+\dfrac{3}{n^2}\right)^{n^2-5}$, se pide:

a. (1,5 puntos) Calcular el valor de L, límite de la sucesión a_n.

b. (1,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto x = 3 / 2.

c. (2 puntos) Graficar f con su recta tangente en x = 3/2 encontrada en el punto anterior, junto con la recta $y = L$ (L es el límite hallado en el punto a) en un mismo sistema de ejes cartesianos, y sombrear el área que encierran.

d. (3 puntos) Calcular el área indicada en el punto anterior.

a) Como es algo de la forma 1 a la infinito, busco que aparezca el número e. Reescribo:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{n^2-5}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2/3}\right)^{\frac{n^2}{3}\cdot\frac{3}{n^2}\cdot(n^2-5)}$$

Aparte, calculamos el límite del exponente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}.(n^2-5)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2(1-5/n^2)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3(1-5/n^2)}{1}=3$$

Resultado: L = e^3

b) Para la recta tg en x = 3/2 necesitamos f(3/2) y f ‘ (3/2)

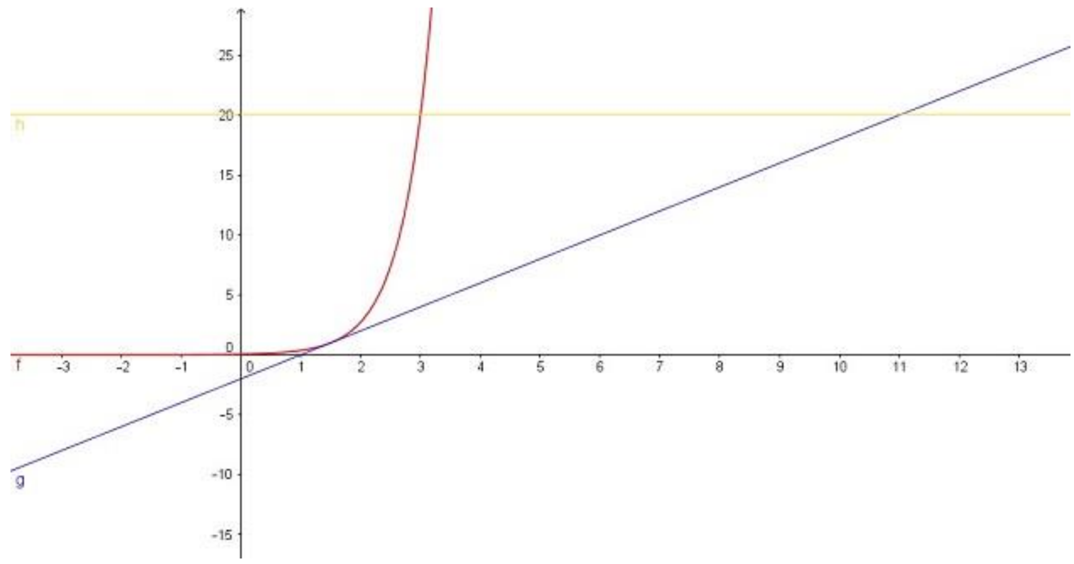
$$f(x)=e^{2x-3} \quad\Rightarrow\quad f(3/2)=e^0=1$$

$$f\,'(x)=e^{2x-3}.2 \quad\Rightarrow\quad f\,'(3/2)=e^0.2=2$$

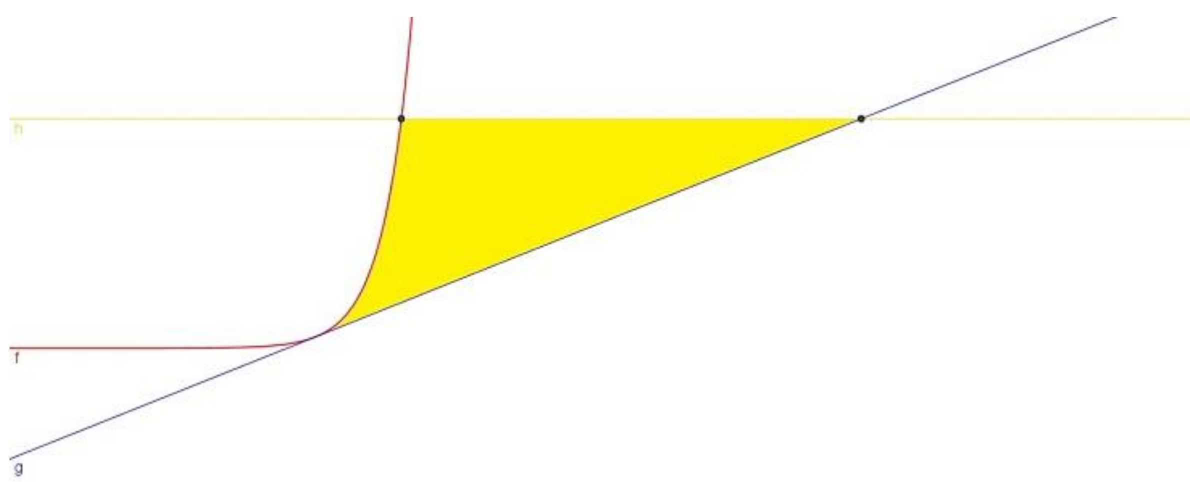
Entonces, la ecuación de la recta tangente en x = 3/2 es:

y = 1 + 2 (x – 3/2) = 2x – 2

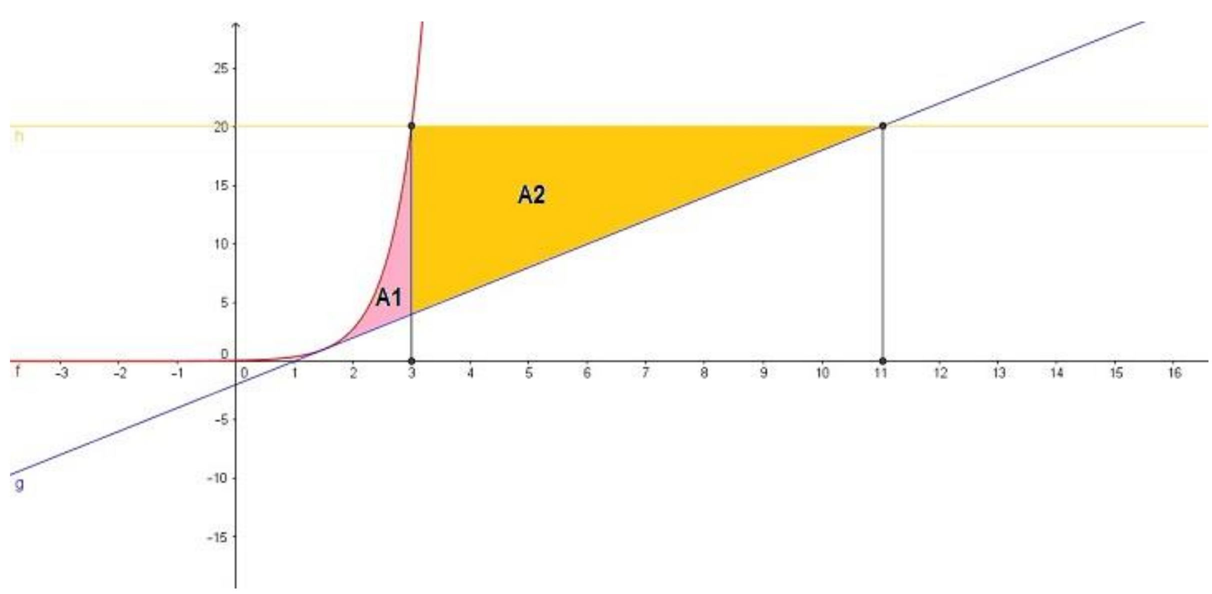
c) El gráfico de las funciones es el siguiente:



La exponencial, en color rojo, es siempre creciente y mayor a cero. La recta tangente, (en azul) por ser tangente, roza a f en x = 3/2, es creciente. Por último, en amarillo, tenemos y = L, que es aprox 20. Conviene hacer el gráfico sin los ejes para no confundir el área que encierran:



Vemos que tenemos un mismo piso pero nos cambia el techo. En la primera parte es la exponencial y, en la segunda, la recta y = L. Hay que ver en qué puntos se cruzan. Por eso igualamos la exponencial con la cte. e^3. Al despejar, nos queda que x = 3. Por último, igualamos las dos lineales, cuando despejamos nos queda que $x = (e^3 + 2)/2$, que es aprox. 11 (pero esto no interesa). Entonces quedan dos áreas:



d) $$A1 = \int_{3/2}^{3} \left[e^{2x-3} - (2x-2)\right] dx = \frac{1}{2}e^{2x-3} - x^2 + 2x \quad \Big|_{3/2}^{3} = \frac{1}{2}e^3 - 9 + 6 - \left(\frac{1}{2} - \frac{9}{4} + 3\right) =$$

$$= \frac{1}{2}e^3 - \frac{17}{4}$$

El área 2 se puede calcular con una integral o, haciendo A2 = b . h / 2 (base x altura) / 2, porque es un triángulo.

$$A2 = \int_3^{(e^3+2)/2} \left[e^3 - (2x-2)\right]dx = e^3x - x^2 + 2x \quad \Big|_3^{(e^3+2)/2} =$$

$$= e^3(e^3+2)/2 - \left((e^3+2)/2\right)^2 + 2(e^3+2)/2 - \left(e^3 3 - 9 + 6\right) =$$

$$= \frac{1}{2}e^6 + e^3 - \frac{1}{4}e^6 - 2e^3 - 2 + e^3 + 2 - 3e^3 + 3 = \frac{1}{4}e^6 - 3e^3 + 3$$

$$At = A1 + A2 = \frac{1}{2}e^3 - \frac{17}{4} + \frac{1}{4}e^6 - 3e^3 + 3 = \frac{1}{4}e^6 - \frac{5}{2}e^3 - \frac{5}{4}$$

Este resultado se podía dejar expresado como A1 + A2.