| ANÁLIS. MAT. ING. - EXACTAS 2C 2017 – R2 | APELLIDO: | SOBRE Nº: |
|---|---|---|
| | NOMBRES: | Duración del examen: 2 hs |
| UBAXXI | DNI/CI/LC/LE/PAS. Nº: | CALIFICACIÓN: |
| | E-MAIL: | |
| TEMA 1 - 04-12-17 | TELÉFONOS part: cel: | Apellido del evaluador: |

*Completar con letra clara, mayúscula e imprenta*

**Escribir las respuestas en las líneas punteadas. El desarrollo de este ejercicio no será tenido en cuenta, por lo que no hay que entregarlo.**

**Ej 1.** (2 puntos) Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^3 2^n}$

a) El radio de convergencia es: ………………………………………..……………

b) El intervalo de convergencia de la serie es*:* ………………………………………

Solución:

Usamos el criterio de D'Alembert para analizar cuando converge la serie:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)^3\,2^{n+1}}}{\frac{(x+1)^n}{n^3 2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)^3\,2^{n+1}}\,\frac{n^3\,2^n}{(x+1)^n}\right|$$

Acomodamos para poder simplificar y dejamos modulo solo en los factores que pueden ser negativos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{|(x+1)^n|}|x+1|}{(n+1)^3\cancel{2^n}2}\,\frac{n^3\cancel{2^n}}{\cancel{|(x+1)^n|}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+1|n^3}{(n+1)^3 2}$$

Lo que no depende de n lo podemos sacar del límite y pedimos que éste sea menor a 1 para que la serie converja:

$$|x+1|\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(n+1)^3 2} = |x+1|\frac{1}{2} < 1$$

Despejando queda: $|x+1| < 2$. Luego el radio de convergencia es 2, y sabemos que x está entre 1 y -3 resolviendo la inecuación. Resta analizar que pasa en x=1 y en x=-3 para definir en intervalo.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+1)^n}{n^3 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^3 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ es una serie p con p>1, por lo tanto, la serie numérica converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3+1)^n}{n^3 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n^3 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}(-1)^n$$

Es una serie alternada, para saber si converge basta analizar que $a_n$ tienda a cero cuando n tiende a infinito y que es estrictamente decreciente. Cómo ambas cosas se cumplen podemos decir que es convergente.

Por lo tanto, el intervalo de convergencia es: [-3, 1].

**Ejercicios a desarrollar.**

**Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas. No se aceptarán cálculos dispersos o poco claros.**

**Ej 2.** (2 puntos) Sea $f(x) = axe^{2x} + bx - 5$, calcular $a$ y $b$ reales, sabiendo que el polinomio de Taylor de grado 2 en $x_0 = 0$ es $p(x) = -5 + 2x + 6x^2$

$$f(0) = p(0) = -5 \rightarrow -5 = -5$$
$$f'(0) = p'(0) = 2 \rightarrow 2 = ae^{2.0} + 2\,a\,0\,e^{2.0} + b \rightarrow 2 = a + b$$
$$f''(0) = p''(0) = 12 \rightarrow 12 = 2ae^{2.0} + 2a\,e^{2.0} + 4a\,0\,e^{2.0} \rightarrow 3 = a \rightarrow b = -1$$

**Ej 3.** (3 puntos) Calcular la siguiente integral indefinida $\int \frac{3e^x}{e^{2x} + e^x - 2} dx$

Sea $z = e^x$, entonces $dz = e^x dx$. Sustituimos y nos queda:

$$\int \frac{3}{z^2 + z - 2} dz = 3 \int \frac{1}{(z+2)(z-1)} dz$$

Separamos en fracciones simples:

$$1 = a(z-1) + b(z+2)$$

Si $z = 1$, entonces $\frac{1}{3} = b$.

Si $z = -2$, entonces $a = -\frac{1}{3}$.

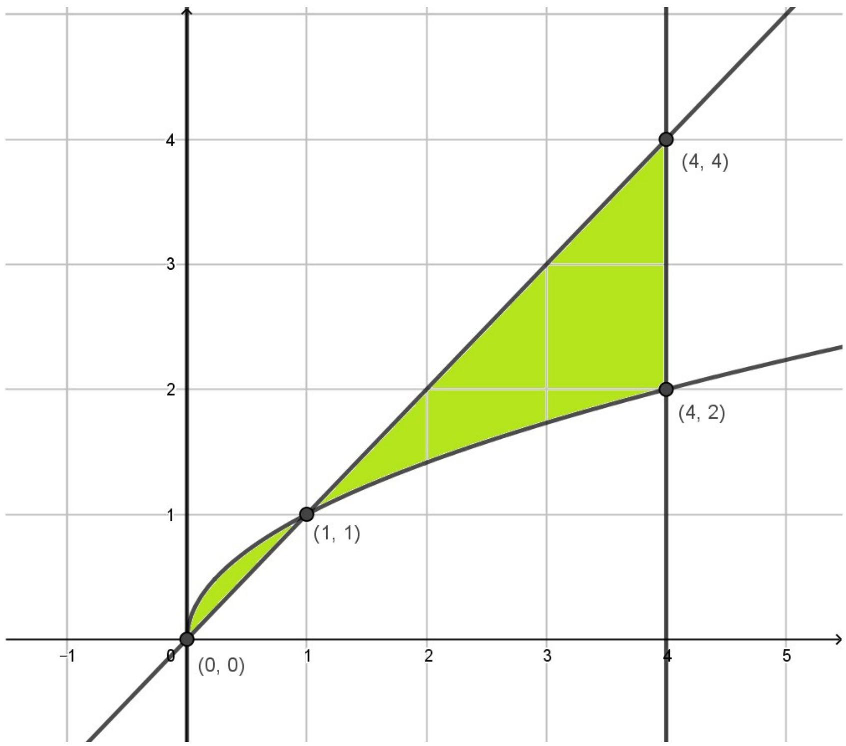
$$\int \frac{3}{z^2 + z - 2} dz = 3\left[\int \frac{-\frac{1}{3}}{z+2} dz + \int \frac{\frac{1}{3}}{z-1} dz\right] = -\ln|z+2| + \ln|z-1|$$

Volvemos a variable x, y nos queda:

$$\int \frac{3e^x}{e^{2x} + e^x - 2} dx = -\ln(e^x + 2) + \ln|e^x - 1| + C = ln\frac{|e^x - 1|}{e^x + 2} + C$$

**Ej 4.** (3 puntos) Graficar y hallar el área encerrada entre las curvas $y = x$, $y = \sqrt{x}$, con $0 \le x \le 4$.

Hay que graficar y sombrear el área. Para buscar los cortes resolvemos el sistema con ecuaciones $y = x$ $y = \sqrt{x}$, cuya solución es el punto (1, 1) y (0,0). Evaluamos las dos funciones en x=4, lo que da los puntos (4,4) y (4,2).




Entonces el área total se calcula como la suma de dos integrales:

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x)dx + \int_1^4 (x - \sqrt{x})dx = \left.\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^2}{2}\right|_0^1 + \left.\frac{x^2}{2} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_1^4 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 8 - \frac{16}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 3$$