ANÁLIS. MAT. ING. - EXACTAS 2C 2017 – R1 UBAXXI	APELLIDO:	SOBRE Nº:
	NOMBRES:	Duración del examen: 2 hs
	DNI/CI/LC/LE/PAS. Nº:	CALIFICACIÓN:
	E-MAIL:	
TEMA 1 - 04-12-17	TELÉFONOS part: cel:	Apellido del evaluador:

Completar con letra clara, mayúscula e imprenta

Escribir las respuestas en las líneas punteadas. El desarrollo de este ejercicio no será tenido en cuenta, por lo que no hay que entregarlo.

Ej 1. (2 puntos) Sea $f(x)=\ln(-2x+1)$ y $g(x)=\dfrac{3x-5}{x+2}$ entonces:

a) El dominio de *f* es: (-∞, ½) ……………………..…………………………

Como es una función logarítmica hay que pedir que el argumento sea mayor a cero, entonces resolvemos la inecuación: *-2x + 1>0 → 1> 2x → ½ > x*

b) La función inversa de g(x) es $g^{-1}(x)=$………………………………………..…..

g es una función biyectiva si la consideramos de R-{-2} a R-{3}, entonces existe la función inversa g^{-1}: R-{3}→ R-{-2} cuya formula se obtiene de la siguiente forma:

$$y=\frac{3x-5}{x+2}$$
$$y(x+2)=3x-5$$
$$yx+2y=3x-5$$
$$yx-3x=-5-2y$$
$$x(y-3)=-5-2y$$
$$x=\frac{-5-2y}{y-3}$$

Entonces, $g^{-1}(x)=\dfrac{-5-2x}{x-3}$.

c) La función *fog* (x) es: $fog:(-2,7/2)\rightarrow R\,/\,fog(x)=\ln\left(\dfrac{-5x+12}{x+2}\right)$……..

Para hacer la composición hay que definir el dominio, hay que pedir que Im(g) este incluida en el dominio de f. Entonces, nos queda la inecuación:

$$\frac{3x-5}{x+2} < \frac{1}{2}$$

Para resolver esta ecuación la llevamos a una desigualdad contra cero y analizamos cuando el cociente es negativo.

$$\frac{3x-5}{x+2} - \frac{1}{2} < 0 \rightarrow \frac{2x-7}{2(x+2)} < 0$$

Esta desigualdad se cumple cuando x pertenece al intervalo: (-2, 7/2). La fórmula de la composición es:

$$f(g(x)) = \ln\left(-2\frac{3x-5}{x+2}+1\right) = \ln\left(\frac{-6x+10}{x+2}+1\right) = \ln\left(\frac{-6x+10+x+2}{x+2}\right)$$

$$fog(x) = \ln\left(\frac{-5x+12}{x+2}\right)$$

d) La ecuación de la recta tangente al gráfico de *f* en x = – 1/2 es: …………………….

La ecuación de la recta tangente es de la forma *y-f(-1/2)=f'(-1/2) (x+1/2)*. Por lo tanto, hay que encontrar *f(-1/2)* y *f ' (-1/2)*.

$$f(-1/2) = \ln(-2(-1/2)+1) = \ln(2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{-2x+1}(-2) \rightarrow f'(-1/2) = -1$$

Entonces la recta tangente es: *y – ln(2) = - (x+1/2) o y = - x -1/2 + ln(2)*.

Ejercicios a desarrollar.

Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas. No se aceptarán cálculos dispersos o poco claros.

Ej 2. (2 puntos) Sea $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\mathrm{sen(x) - xcos(x)}}{4\mathrm{x}^2}+2 & si \quad x \neq 0 \\ 2 & si \quad x=0 \end{cases}$ Estudiar continuidad y derivabilidad en x = 0.

Solución.

Primero hay que estudiar la continuidad, porque para que sea derivable es necesario que sea continua pero no es suficiente. Hay que verificar tres cosas:

1) existe *f(0)*. Es cierto, y vale 2 por cómo está definida la función.

2) analizar si existe el límite.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{sen(x) - xcos(x)}}{4\mathrm{x}^2}+2\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{sen(x) - xcos(x)}}{4\mathrm{x}^2}\right)+2=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{cos(x) - (cos(x) - x\ sen(x))}}{8\mathrm{x}}\right)+2$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{x\ sen(x)}}{8\mathrm{x}}\right)+2=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{sen(x) + xcos(x)}}{8}\right)+2=2$$

Por lo tanto, podemos decir que el limite existe y vale 2.

3) Analizar que el límite y la imagen de la función son iguales.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=2=f(0)$$

Por lo tanto, podemos concluir que es continua. Luego, tiene sentido preguntar si la función es derivable. Calculamos la derivada por definición en el punto donde nos piden: x = 0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\mathrm{sen(x) - xcos(x)}}{4\mathrm{x}^2}+2-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen(x) - xcos(x)}}{4\mathrm{x}^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{cos(x) - (cos(x) - x\ sen(x))}}{12\mathrm{x}^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{x\ sen(x)}}{12\mathrm{x}^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{sen(x) + xcos(x)}}{12\mathrm{x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{cos(x) + cos(x) - xsen(x)}}{12}\right)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

Entonces la derivada existe y vale 1/6.

Ej 3. Sea $f(x)=\dfrac{2x^3}{3-x^2}$

a) (1 punto) Indicar dominio y raíces de la función.

Para encontrar el dominio, como es fraccionaria, igualamos el denominador a cero:

$$3-x^2=0 \rightarrow 3=x^2 \rightarrow x=\sqrt{3} \vee x=-\sqrt{3}$$

Luego el dominio es $Df = R - \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

Para encontrar las raíces, hay que igualar la función a cero:

$$f(x) = \frac{2x^3}{3 - x^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

Entonces hay una sola raíz: x=0.

b) (2 puntos) Analizar asíntotas horizontales, verticales y oblicuas.

La asíntota vertical, si existe, tiene que estar en algún borde del dominio. En este caso hay dos bordes $x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$. Luego hay que analizar los limites por derecha e izquierda, en el caso que alguno de infinito entonces se puede asegurar que son asíntotas verticales.

$\lim_{x \to \sqrt{3}^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to \sqrt{3}^-} f(x) = +\infty$, entonces $x = \sqrt{3}$.

$\lim_{x \to -\sqrt{3}^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to -\sqrt{3}^-} f(x) = +\infty$, entonces $x = -\sqrt{3}$.

Tenemos una función fraccionaria, donde el grado del denominador es mayor al del numerador, esto implica que no hay asíntota horizontal pero sí puede haber asíntota oblicua.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^3}{3 - x^2} \frac{1}{x} \right) = -2 \quad \text{y} \quad m = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2x^3}{3 - x^2} \frac{1}{x} \right) = -2$$

Luego hay una única asíntota oblicua con pendiente -2. Hay que buscar la ordenada al origen:

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2x^3}{3 - x^2} + 2x \right) = 0$$

Luego, la asíntota oblicua es: y = -2 x

c) (2 puntos) Indicar intervalos de crecimiento y decrecimiento, y extremos relativos.

Para esto necesitamos la derivada primera:

$$f\ '(x)=\left[\frac{2x^3}{3-x^2}\right]'=\frac{6x^2(3-x^2)-2x^3(-2x)}{(3-x^2)^2}=\frac{x^2(18-6x^2+4x^2)}{(3-x^2)^2}$$

Igualamos a cero, y obtenemos lo puntos críticos que pueden ser o no extremos.

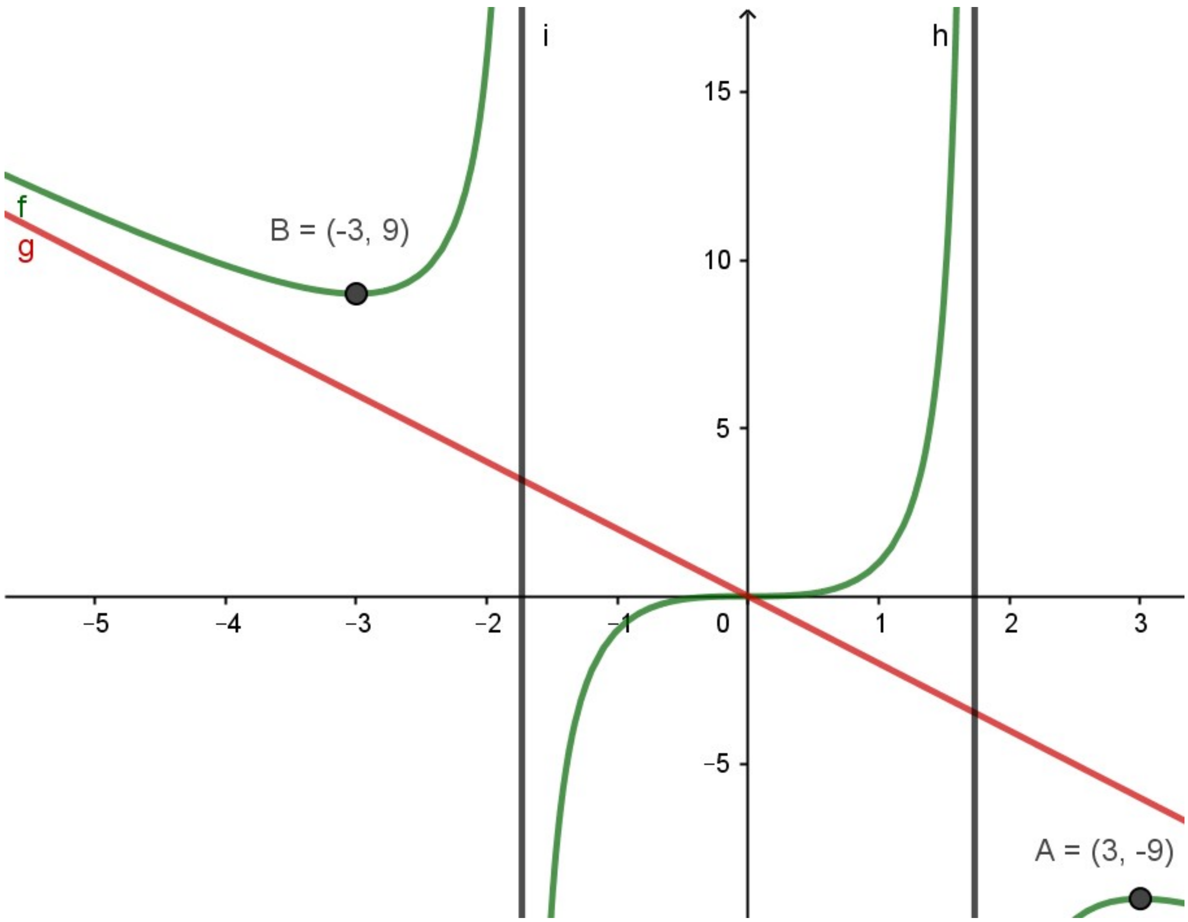
$$\frac{x^2(18-2x^2)}{(3-x^2)^2}=0\rightarrow x=0\vee 18-2x^2=0\rightarrow x=0\vee x=3\vee x=-3$$

Entonces armamos la tabla para analizar el signo de la derivada primera y determinar en que intervalo crece y en cual decrece y concluir donde hay extremos. Recordar que hay que incluir las asíntotas porque dividen al dominio en intervalos.

x	(-∞, -3)	-3	(-3,- $\sqrt{3}$)	- $\sqrt{3}$	(- $\sqrt{3}$,0)	0	(0, $\sqrt{3}$)	$\sqrt{3}$	($\sqrt{3}$,3)	3	(3, +∞)
Sgf'(x)	-	0	+	No existe	+	0	+	No existe	+	0	-
F(x)	decrece	F(-3) min	crece	No existe	crece	nada	crece	No existe	crece	F(3) max	decrece

Int crecimiento: (-3,- $\sqrt{3}$)U(- $\sqrt{3}$,0)U(0, $\sqrt{3}$)U($\sqrt{3}$,3)
Int decrecimiento: (-∞, -3) U (3, +∞)
Máximo relativo: f (3) = - 9
Mínimo relatico f (-3) = 9

d) (1 punto) Con la información obtenida en los puntos anteriores, realizar un gráfico aproximado de la función.



f
g
B = (-3, 9)
A = (3, -9)
i
h
15
10
5
−5
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3