Examen final – Resuelto Tema 3

Ecuación de un plano

(1 pt) Hallen una ecuación implícita para el plano Π que es paralelo a la recta $R = \{X \in R^3 : X = k(1;2;-1) + (1;2;-3),\ k \in R\}$ y contiene a la recta $L = \{X \in R^3 : X = t(-1;1;0) + (0;0;1), t \in R\}$

Si Π es paralelo a R y contiene a L, se puede definir un vector normal al plano a partir del producto vectorial de los vectores directores de las rectas:

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \check{\imath} & \check{\jmath} & \check{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1;1;3)$$

Como punto del plano, elegimos el punto de la recta L. Luego:

$$\Pi: x + y + 3z = d \to 0 + 0 + 3 \cdot 1 = d \to 3 = d \to \Pi: x + y + 3z = 3$$

Respuesta: $\boxed{\Pi: x + y + 3z = 3}$

Distancia de punto a recta

(1 pt) Hallen la distancia del punto $P = (1;1;1)$ a la recta $L = \{X \in R^3 : X = t(2;1;4) + (0;0;-3), t \in R\}$

Definimos la ecuación de un plano perpendicular a L que contenga al punto P dado. Para ello, utilizamos como vector normal al plano el vector director de la recta:

$$\Pi: [(x;y;z) - (1;1;1)](2;1;4) = 0$$
$$\Pi: 2(x-1) + (y-1) + 4(z-1) = 0$$
$$\Pi: 2x + y + 4z = 7$$

Buscamos el punto Q de intersección entre la recta y el plano, reemplazando las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación del plano:

$$2 \cdot 2t + t + 4(4t - 3) = 7$$
$$4t + t + 16t - 12 = 7$$
$$21t = 19 \to t = \frac{19}{21} \to Q = \left(\frac{38}{21}; \frac{19}{21}; \frac{13}{21}\right)$$

La distancia entre P y L es la distancia entre P y Q:

$$Dist(P;Q) = \sqrt{\left(\frac{38}{21} - 1\right)^2 + \left(\frac{19}{21} - 1\right)^2 + \left(\frac{13}{21} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{357}}{21}$$

Respuesta: $\boxed{\frac{\sqrt{357}}{21}}$

Subespacios

Señalen con una cruz la única opción correcta en cada uno de los siguientes enunciados.

a) (0,5 pt) El conjunto $\langle(-2;1;-2);(3;-1;5);(13;k;19)\rangle$ es una base de R^3 cuando k es distinto de:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 13 & k & 19 \end{vmatrix} \to \begin{matrix} F_1 \\ 3F_1 + 2F_2 \\ 13F_1 + 2F_3 \end{matrix} \to \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 13+2k & 12 \end{vmatrix} \to \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ (13+2k)F_2 - F_3 \end{matrix} \to \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 8k+40 \end{vmatrix}$$

Si $8k + 40 \neq 0 \to$ la matriz tiene rango 3 y los tres vectores son linealmente independientes: forman base.
Luego $8k + 40 \neq 0 \to k \neq -5$

☐ 0 ☐ 7 ☐ 5 ☒ -5

b) (0,5 pt) Para el valor de k hallado en el ítem anterior, la dimensión del subespacio $\langle(-2;1;-2);(3;-1;5);(13;k;19)\rangle$ es:

Si $k = -5 \to$ el rango de la matriz es 2 porque se anula la última fila. Luego esa será la dimensión del subespacio.

☐ 1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4

Cónicas

Calculen el centro y la excentricidad de la hipérbola de ecuación: $x^2 - 4x - y^2 + 8y - 8 = 0$

Completamos cuadrados en la igualdad: $x^2 - 4x - y^2 + 8y - 8 = 0$

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 - [(y^2 - 8y + 16) - 16] - 8 = 0$$
$$(x-2)^2 - (y-4)^2 - 4 + 16 - 8 = 0$$
$$(x-2)^2 - (y-4)^2 = -4$$
$$\frac{(x-2)^2}{-4} - \frac{(y-4)^2}{-4} = \frac{-4}{-4}$$
$$\frac{(y-4)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$$

$$a = b = 2 \to c^2 = a^2 + b^2 \to c^2 = 8 \to c = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

(0,5 pt) **Centro**: $\boxed{(2;4)}$ (0,5 pt) **Excentricidad**: $\boxed{e = \sqrt{2}}$

Sistemas de ecuaciones lineales

(1 pt) Hallen todos los valores de $a, b \in R$ tales que $(1;0;-1)$ es una de las infinitas soluciones del sistema:

$$\begin{cases} x + y + 4z = -3 \\ -ay + bz = -2 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$$

Si $(1;0;-1)$ es una de las infinitas soluciones, verifica las ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} 1 + 0 + 4(-1) = -3 \to \text{verifica} \\ -a \cdot 0 + b(-1) = -2 \to b = 2 \\ 0 - 2(-1) = 2 \to \text{verifica} \end{cases}$$

Si $b = 2$ el sistema se reescribe como:

$$\begin{cases} x + y + 4z = -3 \\ -ay + 2z = -2 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$$

Analicemos el sistema en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -a & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_2 + aF_3 \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2-2a & -2+2a \end{array}\right)$$

Si $2 - 2a \neq 0 \to a \neq 1$ el sistema tendrá solución. Luego:

Respuesta: $\boxed{a = 1, b = 2}$

Determinantes

Señalen con una cruz la única opción correcta en cada uno de los siguientes enunciados.

a) (0,5 pt) Si $A, B \in R^{3\times3}$ son tales que $\det(A) = 10$ y $\det(A \cdot B) = 15$ entonces $\det(2B^{-1})$ es igual a:

$$\det(A \cdot B) = 15 \to \underbrace{\det(A)}_{10} \cdot \det(B) = 15 \to \det(B) = \frac{15}{10} \to \det(B) = \frac{3}{2} \to \det(B^{-1}) = \frac{2}{3}$$

Luego: $\det(2B^{-1}) = 2^3 \cdot \det(B^{-1}) = 8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$

☐ $\frac{4}{3}$	☐ $\frac{2}{3}$	☐ 12	X $\frac{16}{3}$

b) (0,5 pt) Si $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 8$ entonces $\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & a & 0 \\ c & d & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & a & 0 \\ c & d & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{=}_{\text{por la fila 1}} 2\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ d & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\text{por la fila 3}} 2\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =$$

$$= -1\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -1 \cdot 8 = -8$$

☐ 8 ☒ -8 ☐ -16 ☐ 24

Transformaciones lineales

Señalen con una cruz la única opción correcta en cada uno de los siguientes enunciados.

a) (0,75 pt) Si $T: R^2 \to R^2$ es el deslizamiento cortante de factor 5 en la dirección del eje y entonces $T(1;-3)$ es igual a:

$$T(x;y)_{k=5,\text{eje } y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to T(1;-3)_{k=5,\text{eje } y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = (1\cdot 1 + 0\cdot(-3); 5\cdot 1 + 1\cdot(-3)) = (1;2)$$

☐ $(-14;-3)$ ☐ $(5;-3)$ ☐ $(1;-15)$ ☒ $(1;2)$

b) (0,75 pt) La transformación lineal $T: R^2 \to R^2$ cuya matriz canónica asociada es $A_T = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ transforma el cuadrado unitario de R^2 en un paralelogramo cuya área es:

$$\det(A_T) = \begin{vmatrix} 7 & -12 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7(-2) - 3(-12) = -14 + 36 = 22$$

☒ 22 ☐ 50 ☐ 5 ☐ 11

Números complejos

Calculen el módulo y el argumento de $z = (-1+i)^{11}(-2i)$

$$-2i = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$-1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right) \to (-1+i)^{11} = 2^{\frac{11}{2}}\left(\cos\frac{33\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{33\pi}{4}\right)$$

$$(-1+i)^{11}(-2i) = 2\cdot 2^{\frac{11}{2}}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{33\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{33\pi}{4}\right)\right)$$

$$2\cdot 2^{\frac{11}{2}} = 2^{\frac{13}{2}} \qquad \frac{3\pi}{2} + \frac{33\pi}{4} = \frac{39\pi}{4} = \underbrace{\frac{32}{4}}_{\text{vueltas completas}} + \frac{7\pi}{4}$$

(0,5 pt) **Módulo**: $\boxed{2^{\frac{13}{2}}}$ (0,5 pt) **Argumento**: $\boxed{\frac{7\pi}{4}}$

Polinomios

Respondan a cada una de las siguientes consignas:

a) (0,5 pt) Si $P(x) \in R[X]$ tiene como raíces a $2+i; -3i; 1+\sqrt{5}$ entonces el mínimo grado posible de $P(x)$ es:

Si $P(x) \in R[X]$además de ser raíz $2+i$ también lo es $2-i$. Lo mismo sucede con $-3i$ y $3i$. Con la raíz $1+\sqrt{5}$ tenemos un total de 5 raíces para un polinomio de coeficientes reales. Luego, el mínimo grado posible es 5.

Respuesta: $\boxed{5}$

b) (0,5 pt) El polinomio $Q(x) = (x^2 - 2)(x^2 - x + 2)(x^3 - x^2 - 2x + 2)$ tiene:

- $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$
- $x^2 - x + 2 = 0 \to x_1, x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2} \to x^2 - x + 2 = \left(x - \left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)\right)\left(x - \left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)\right)$
- $x^3 - x^2 - 2x + 2 = x^2(x-1) - 2(x-1) = (x^2 - 2)(x - 1) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 1)$

$$Q(x) = (x - \sqrt{2})^2 (x + \sqrt{2})^2 (x - 1)\left(x - \left(\frac{1 + i\sqrt{7}}{2}\right)\right)\left(x - \left(\frac{1 - i\sqrt{7}}{2}\right)\right)$$

Respuesta: 3 (tres) raíces simples y 2 (dos) raíces dobles.

c) (0,5 pt) La expresión factorizada de $Q(x)$ del ítem b) en $C[X]$ es:

Respuesta: $Q(x) = (x - \sqrt{2})^2 (x + \sqrt{2})^2 (x - 1)\left(x - \left(\frac{1 + i\sqrt{7}}{2}\right)\right)\left(x - \left(\frac{1 - i\sqrt{7}}{2}\right)\right)$