

Examen final – Resuelto Tema 2

Ecuación de un plano

(1 pt) Hallen una ecuación implícita para el plano Π que es paralelo a la recta $L = \{X \in R^3: X = t(1; 1; -1) + (0; 1; 2), t \in R\}$ y contiene a la recta $R = \{X \in R^3: X = k(-1; -1; 0) + (1; 1; 2), k \in R\}$

Si Π es paralelo a L y contiene a R , se puede definir un vector normal al plano a partir del producto vectorial de los vectores directores de las rectas:

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1; 1; 0)$$

Como punto del plano, elegimos el punto de la recta R . Luego:

$$\Pi: -x + y = d \rightarrow -1 + 1 = d \rightarrow 0 = d \rightarrow \Pi: -x + y = 0$$

Respuesta:

Distancia de punto a recta

(1 pt) Hallen la distancia del punto $P = (1; 1; 1)$ a la recta $L = \{X \in R^3: X = t(-1; -2; -1) + (-1; 4; 7), t \in R\}$

Definimos la ecuación de un plano perpendicular a L que contenga al punto P dado. Para ello, utilizamos como vector normal al plano el vector director de la recta:

$$\begin{aligned} \Pi: [(x; y; z) - (1; 1; 1)](-1; -2; -1) &= 0 \\ \Pi: -(x - 1) - 2(y - 1) - (z - 1) &= 0 \\ \Pi: -x - 2y - z + 4 &= 0 \rightarrow \Pi: 4 = x + 2y + z \end{aligned}$$

Buscamos el punto Q de intersección entre la recta y el plano, reemplazando las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación del plano:

$$\begin{aligned} 4 &= (-t - 1) + 2(-2t + 4) + (-t + 7) \\ 6t &= 10 \rightarrow t = \frac{5}{3} \rightarrow Q = \left(-\frac{8}{3}; \frac{2}{3}; \frac{16}{3}\right) \end{aligned}$$

La distancia entre P y L es la distancia entre P y Q :

$$Dist(P; Q) = \sqrt{\left(-\frac{8}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{16}{3} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{291}}{3}$$

Respuesta:

Subespacios

Señalen con una cruz la única opción correcta en cada uno de los siguientes enunciados.

a) (0,5 pt) El conjunto $\langle (2; -1; -2); (1; 4; -3); (-9; k; 15) \rangle$ es una base de R^3 cuando k es distinto de:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \\ -9 & k & 15 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1 \\ F_1 - 2F_2 \\ 9F_1 + 2F_3}} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & -9 & 4 \\ 0 & -9 + 2k & 12 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1 \\ F_2 \\ (-9 + 2k)F_2 + 9F_3}} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & 8k + 72 \end{vmatrix}$$

Si $8k + 72 \neq 0 \rightarrow$ la matriz tiene rango 3 y los tres vectores son linealmente independientes: forman base.

Luego $8k + 72 \neq 0 \rightarrow k \neq -9$

9 -9 -15 3

b) (0,5 pt) Para el valor de k hallado en el ítem anterior, la dimensión del subespacio $\langle (-2; 1; -2); (3; -1; 5); (13; k; 19) \rangle$ es:

Si $k = -9 \rightarrow$ el rango de la matriz es 2 porque se anula la última fila. Luego esa será la dimensión del subespacio.

1 3 2 4

Cónicas

Calculen el centro y la excentricidad de la hipérbola de ecuación: $x^2 + 6x - y^2 - 10y + 9 = 0$

Completamos cuadrados en la igualdad: $x^2 + 6x - y^2 - 10y + 9 = 0$

$$(x^2 + 6x + 9) - 9 - [(y^2 + 10y + 25) - 25] + 9 = 0$$

$$(x + 3)^2 - (y + 5)^2 - 9 + 25 + 9 = 0$$

$$(x + 3)^2 - (y + 5)^2 = -25$$

$$\frac{(x + 3)^2}{25} - \frac{(y + 5)^2}{25} = \frac{-25}{25}$$

$$\frac{(x + 3)^2}{25} - \frac{(y + 5)^2}{25} = -1$$

$$a = b = 5 \rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 50 \rightarrow c = 5\sqrt{2}$$

(0,5 pt) **Centro:**

(0,5 pt) **Excentricidad:**

Sistemas de ecuaciones lineales

(1 pt) Hallen todos los valores de $m, p \in \mathbb{R}$ tales que $(1; 0; -1)$ es una de las infinitas soluciones del sistema:

$$\begin{cases} y = 2z + 2 \\ mz + 2 = py \\ x + y + 4z + 3 = 0 \end{cases}$$

Si $(1; 0; -1)$ es una de las infinitas soluciones, verifica las ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} 0 = 2(-1) + 2 \rightarrow \text{verifica} \\ m(-1) + 2 = p(0) \rightarrow m = 2 \\ 1 + 0 + 4(-1) + 3 = 0 \rightarrow \text{verifica} \end{cases}$$

Si $m = 2$ el sistema se reescribe como:

$$\begin{cases} y = 2z + 2 \\ 2z + 2 = py \\ x + y + 4z + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + 4z = -3 \\ -py + 2z = -2 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$$

Analizamos el sistema en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -p & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 + pF_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 - 2p & -2 + 2p \end{array} \right)$$

Si $2 - 2p \neq 0 \rightarrow p \neq 1$ el sistema tendrá solución. Luego:

Respuesta:

Determinantes

Señalen con una cruz la única opción correcta en cada uno de los siguientes enunciados.

a) (0,5 pt) Si $M, N \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ son tales que $\det(N) = 8$ y $\det(M \cdot N) = 9$ entonces $\det(3M^{-1})$ es igual a:

$$\det(M \cdot N) = 9 \rightarrow \underbrace{\det(N)}_8 \cdot \det(M) = 9 \rightarrow \det(M) = \frac{9}{8} \rightarrow \det(M^{-1}) = \frac{8}{9}$$

$$\text{Luego: } \det(3M^{-1}) = 3^3 \cdot \det(M^{-1}) = 27 \cdot \frac{8}{9} = 24$$

 $\frac{27}{8}$ $\frac{24}{9}$ $\frac{8}{9}$

24

b) (0,5 pt) Si $\det \begin{pmatrix} m & n \\ q & p \end{pmatrix} = 7$ entonces $\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ m & n & m & 0 \\ q & p & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es:

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ m & n & m & 0 \\ q & p & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{por la fila 1}}{\equiv} 3 \begin{vmatrix} n & m & 0 \\ p & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} m & n & 0 \\ q & p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{por la fila 3}}{\equiv} 3 \begin{vmatrix} n & m \\ p & q \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} m & n \\ q & p \end{vmatrix}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} m & n \\ q & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n \\ q & p \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} m & n \\ q & p \end{vmatrix} = -2 \cdot 7 = -14$$

-14 28 7 -7

Transformaciones lineales

Señalen con una cruz la única opción correcta en cada uno de los siguientes enunciados.

a) (0,75 pt) Si $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es el deslizamiento cortante de factor 6 en la dirección del eje x entonces $T(-2; 4)$ es igual a:

$$T(x; y)_{k=6, \text{eje } x} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow T(-2; 4)_{k=5, \text{eje } y} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = (1 \cdot (-2) + 6 \cdot 4; 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 4) = (22; 4)$$

(22; 4) (-2; -8) (6; -4) (-12; 4)

b) (0,75 pt) La transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuya matriz canónica asociada es $A_T = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ transforma el cuadrado unitario de \mathbb{R}^2 en un paralelogramo cuya área es:

$$\det(A_T) = \begin{vmatrix} -5 & -10 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -5(-3) - 5(-10) = 15 + 50 = 65$$

50 $\frac{65}{2}$ 65 35

Números complejos

Calculen el módulo y el argumento de $z = (3i)(1 - i)^{13}$

- $3i = 3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right)$
- $1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} \right) \rightarrow (1 - i)^{13} = 2^{\frac{13}{2}} \left(\cos \frac{91\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{91\pi}{4} \right)$
- $(-1 + i)^{11}(-2i) = 3 \cdot 2^{\frac{13}{2}} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{91\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{91\pi}{4} \right) \right)$
- $\frac{\pi}{2} + \frac{91\pi}{4} = \frac{93\pi}{4} = \underbrace{\frac{88}{4}}_{\text{vueltas completas}} + \frac{5\pi}{4}$

(0,5 pt) **Módulo:** (0,5 pt) **Argumento:**

Polinomios

Respondan a cada una de las siguientes consignas:

a) (0,5 pt) Si $P(x) \in R[X]$ tiene como raíces a $2 + i; \sqrt{7}; 1 + \sqrt{5}$ entonces el mínimo grado posible de $P(x)$ es:

Si $P(x) \in R[X]$ además de ser raíz $2 + i$ también lo es $2 - i$. Con las raíces $1 + \sqrt{5}$ y $\sqrt{7}$ tenemos un total de 5 raíces para un polinomio de coeficientes reales. Luego, el mínimo grado posible es 5.

Respuesta:

b) (0,5 pt) El polinomio $Q(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4x + 5)(x^3 - x^2 - 4x + 4)$ tiene en $\mathbb{C}[X]$:

- $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$
- $x^2 - 4x + 5 = 0 \rightarrow x_1, x_2 = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} \rightarrow x^2 - x + 2 = (x - (2 + i))(x - (2 - i))$
- $x^3 - x^2 - 4x + 4 = x^2(x - 1) - 4(x - 1) = (x^2 - 4)(x - 1) = (x - 2)(x + 2)(x - 1)$

$$Q(x) = (x - 1)^2(x + 1)(x - 2)(x + 2)(x - (2 + i))(x - (2 - i))$$

Respuesta: 1 (una) raíz doble y 5 (cinco) raíces simples.

c) (0,5 pt) La expresión factorizada de $Q(x)$ del ítem b) en $\mathbb{C}[X]$ es:

Respuesta: $Q(x) = (x - 1)^2(x + 1)(x - 2)(x + 2)(x - 2 - i)(x - 2 + i)$
