ÁLGEBRA FCE

PRIMER PARCIAL

12 - 02 - 2020

TEMA 1

✓ ***Ejercicio 1***

Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y-z=6 \\ -x+2y+z=0 \\ 3y=6 \end{cases}$ *su conjunto solución es:*

☐ *a)* $S=\{\alpha(1;0;1)+(4;2;0)/\alpha\in\Re\}$ ☐ *b)* $S=\{(4;2;0)\}$

☐ *c)* $S=\{\alpha(1;1;1)+(4;2;0)/\alpha\in\Re\}$ ☐ *d)* $S=\{\alpha(1;0;1)+\beta(4;2;0)/\alpha,\beta\in\Re\}$

Escribimos la matriz ampliada del sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y-z=6 \\ -x+2y+z=0 \\ 3y=6 \end{cases}$ *y resolvemos aplicando Gauss Jordan:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \underline{\underline{1}} & 1 & -1 & 6 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right) \frac{1}{3}\cdot F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & \underline{\underline{1}} & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} r(A)=r(A')=2<3(\text{nro. de incóg.}) \\ SCI \end{array}$$

El sistema equivalente que resulta es $\begin{cases} x-z=4 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4+z \\ y=2 \end{cases}$

El sistema tiene infinitas soluciones, el conjunto solución es $S=\{(x;y;z)\in\Re^3 / x=4+z \wedge y=2\}$

Podemos expresar la solución, reemplazando y descomponiendo de la siguiente forma

$(x;y;z)=(4+z;2;z)=(z;0;z)+(4;2;0)=z(1;0;1)+(4;2;0)$ *luego la solución pedida es:*

$$\boxed{S=\{\alpha(1;0;1)+(4;2;0)/\alpha\in\Re\}}$$

La respuesta correcta es la ***a)***

✓ ***Ejercicio 2***

Si $A,B\in\Re^{3\times 3}$ ***sabiendo que*** $A\cdot B=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&1\\0&2&1\end{pmatrix}$ ***y que*** $|A|=3$***, entonces el determinante de*** $|B|$ ***es:***

- ☐ ***a)*** $|B|=\frac{5}{3}$
- ☐ ***b)*** $|B|=-\frac{5}{3}$
- ☐ ***c)*** $|B|=-3$
- ☐ ***d)*** $|B|=-1$

Sabemos que $|\mathbf{A.B}|=|\mathbf{A}|.|\mathbf{B}|$

Debemos calcular el determinante de $\mathbf{A.B}$ *ya que* $|\mathbf{A}|$ *es dato*

Desarrollamos por la primera columna por la Regla de Laplace

$$|A\cdot B|=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&0&1\\0&2&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}0&1\\2&1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=2.(-2)-1(-1)=-3$$

$$\therefore \boxed{|A\cdot B|=-3}$$

Reemplazando entonces $|\mathbf{A.B}|=|\mathbf{A}|.|\mathbf{B}|$ *resulta* $-3=3.|B| \Rightarrow \boxed{|B|=-1}$

*La respuesta correcta es la **d)***

✓ ***Ejercicio 3***

El conjunto de valores de $k\in\Re$ ***tales que la matriz*** A ***<u>no</u> admita inversa siendo*** $A=\begin{pmatrix} k & 4+k \\ 1 & 1+k \end{pmatrix}$ ***es:***

- ☐ ***a)*** $\Re-\{-2,2\}$
- ☐ ***b)*** $\{-2,2\}$
- ☐ ***c)*** $\{2\}$
- ☐ ***d)*** $\Re-\{2\}$

La matriz $A=\begin{pmatrix} k & 4+k \\ 1 & 1+k \end{pmatrix}$ *no admite inversa si y solo si su determinante es igual a cero*

$$|A|=\begin{vmatrix} k & 4+k \\ 1 & 1+k \end{vmatrix}=k(1+k)-1(4+k)=\cancel{k}+k^2-4\cancel{-k}=k^2-4$$

Luego $\nexists\, A^{-1}\Leftrightarrow|A|=k^2-4=0$

Como $k^2-4=0\Rightarrow(k+2)(k-2)=0\Rightarrow\boxed{k=-2\vee k=2}$

Podemos escribir en lenguaje conjuntista la solución $\boxed{k\in\{-2,2\}}$

Respuesta correcta es la ***b)***

✓ ***Ejercicio 4***

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ ***y*** $C=2.A$ ***Entonces el determinante de la matriz*** $C\cdot B^{-1}$ **es:**

- ☐ ***a)*** $\left|C\cdot B^{-1}\right|=\frac{1}{2}$
- ☐ ***b)*** $\left|C\cdot B^{-1}\right|=2$
- ☐ ***c)*** $\left|C\cdot B^{-1}\right|=128$
- ☐ ***d)*** $\left|C\cdot B^{-1}\right|=1$

Debemos hallar $\left|C\cdot B^{-1}\right|$*, aplicando las propiedades de los determinantes*

$$\left|C\cdot B^{-1}\right|=|C|\cdot\left|B^{-1}\right|=|C|\cdot\frac{1}{|B|}\therefore\boxed{\left|C\cdot B^{-1}\right|=|C|\cdot\frac{1}{|B|}}\quad "*"$$

¿Qué necesitamos calcular? El determinante de la matriz $C=2.A$ *y el determinante de la matriz* B

$$C=2.A\Rightarrow C=2.\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow C=\begin{pmatrix}6 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow|C|=\begin{vmatrix}6 & -2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=12+4=16\therefore\boxed{|C|=16}$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow|B|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 4\end{vmatrix}=4-(-4)=8\therefore\boxed{|B|=8}$$

Reemplazando en $"*"$ *por los valores hallados resulta:*

$$\left|C\cdot B^{-1}\right|=|C|\cdot\frac{1}{|B|}=16\cdot\frac{1}{8}=2\therefore\boxed{\left|C\cdot B^{-1}\right|=2}$$

La respuesta correcta es la ***b)***

✓ *Ejercicio 5*

Dadas $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 1 & k\end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$*, el conjunto de los* $k\in\Re$ *para los cuales el sistema* $A.X=B$ *es compatible determinado es:*

- ☐ *a)* $\{-7\}$
- ☐ *b)* $\Re-\{-7\}$
- ☐ *c)* $\Re-\{7\}$
- ☐ *d)* $\{7\}$

Un sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado, si el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero.

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes por la Regla de Laplace y lo desarrollamos por la primera columna:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 1 & k\end{vmatrix}=1.\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & k\end{vmatrix}+1.\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & -2\end{vmatrix}=1.(k+2)+1.(-4-5)=k+2-9=k-7\therefore\boxed{|A|=k-7}$$

$$SCD\Leftrightarrow|A|=k-7\neq 0\Rightarrow\boxed{k\neq 7}$$

Podemos escribir en lenguaje conjuntista la solución $\boxed{k\in\Re-\{7\}}$

Respuesta correcta es la ***c)***

✓ ***Ejercicio 6***

El conjunto de todos los $\alpha \in \Re$ ***tales que*** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ ***tiene*** $r(A) \neq 3$ ***es:***

- ☐ ***a)*** $\{8\}$
- ☐ ***b)*** $\Re - \{8\}$
- ☐ ***c)*** $\Re - \{-8\}$
- ☐ ***d)*** $\{-8\}$

El rango de una matriz de orden **3** *es distinto de* **3**, *o sea* **2**, **1** *o* **0**, *si y sólo si el determinante de la matriz es igual a cero*

Simbólicamente: $A \in \Re^{3x3} \wedge r(A) \neq 3 \Leftrightarrow |A| = 0$

Calculamos el determinante de la matriz **A** *por la Regla de la Laplace y lo desarrollamos por la primera columna*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 1.(\alpha + 5) + 1.(-10 - 3) = \alpha + 5 - 13 = \alpha - 8 \therefore \boxed{|A| = \alpha - 8}$$

Como $A \in \Re^{3x3} \wedge r(A) \neq 3 \Leftrightarrow |A| = 0$ *entonces* $|A| = \alpha - 8 = 0 \therefore \boxed{\alpha = 8}$

Podemos escribir en lenguaje conjuntista la solución $\boxed{\alpha \in \{8\}}$

La respuesta correcta es la ***a)***

✓ ***Ejercicio 7***

Sea la recta $\mathbf{L_1 : \lambda(1;-3)+(2;-1)}$***, la ecuación paramétrica de la recta*** $\mathbf{L_2}$ ***paralela a*** $\mathbf{L_1}$ ***que pasa por el punto*** $\mathbf{(2;2)}$ ***es:***

☐ ***a)*** $\mathbf{L_2 : \begin{cases} x = 2\lambda + 2 \\ y = 2\lambda - 1 \end{cases}}$

☐ ***b)*** $\mathbf{L_2 : \begin{cases} x = \lambda + 2 \\ y = -3\lambda + 2 \end{cases}}$

☐ ***c)*** $\mathbf{L_2 : \lambda(2;-1)+(2;2)}$

☐ ***d)*** $\mathbf{L_2 : \lambda(1;-3)+(2;2)}$

Sabemos que: $\mathbf{L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \vec{v}_{L_1} = \vec{v}_{L_2}}$

$\mathbf{L_1 : \lambda(1;-3)+(2;-1) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{L_1} = (1;-3)} \quad \therefore \quad \boxed{\vec{v}_{L_2} = (1;-3)}}$

Como $\mathbf{L_2}$ *debe pasar por* $\mathbf{(2;2)}$

$\mathbf{\Rightarrow L_2 : (x;y) = \lambda(1;-3)+(2;2) \Rightarrow \boxed{L_2 : \begin{cases} x = \lambda + 2 \\ y = -3\lambda + 2 \end{cases}}}$ *Expresión paramétrica de la recta buscada.*

Respuesta correcta es la ***b)***

✓ ***Ejercicio 8***

En una economía hipotética de dos industrias I_1 y I_2 la matriz de los coeficientes tecnológicos es $A=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix}$

Si el vector Demanda Final es $H=\begin{pmatrix} 32 \\ 192 \end{pmatrix}$ ***entonces la producción que satisface al sector I_1 es:***

- ☐ *a)* **83,2**
- ☐ *b)* **1760**
- ☐ *c)* **160**
- ☐ *d)* **51,2**

Usamos el Modelo de Leontief.

Sabemos que $X=(I-A)^{-1}.H$

$$I-A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,8 & -0,4 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix}$$

$$|I-A|=\begin{vmatrix} 0,8 & -0,4 \\ 0 & 0,8 \end{vmatrix}=0,64-0=0,64$$

$$(I-A)^T=\begin{pmatrix} 0,8 & 0 \\ -0,4 & 0,8 \end{pmatrix}\Rightarrow AdjA=\begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix}$$

$$Como\ (I-A)^{-1}=\frac{1}{|I-A|}\cdot AdjA\Rightarrow (I-A)^{-1}=\frac{1}{0,64}\cdot\begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1,25 & 0,625 \\ 0 & 1,25 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix} 1,25 & 0,625 \\ 0 & 1,25 \end{pmatrix}}$$

Reemplazando en $X=(I-A)^{-1}.H$ *se obtiene:*

$$X=\begin{pmatrix} 1,25 & 0,625 \\ 0 & 1,25 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 32 \\ 192 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1,25.32+0,625.192 \\ 0.32+1,25.192 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 160 \\ 240 \end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix} \boxed{160} \\ 240 \end{pmatrix}}$$

Respuesta correcta es la ***c)***

✓ ***Ejercicio 9***

El punto P de la recta $\mathrm{L}_1 : \lambda(-2;-1;1)+(1;3;0)$ ***que pertenece al plano de ecuación*** $\pi : x+y+z=0$ ***es:***

- ☐ ***a)*** $P=(-3;1;2)$
- ☐ ***b)*** $P=(0;0;0)$
- ☐ ***c)*** $P=(5;5;-2)$
- ☐ ***d)*** $P=(-1;2;1)$

Buscamos la ecuación paramétrica de la recta dada :

$$\mathrm{L}_1 : \lambda(-2;-1;1)+(1;3;0) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=-2\lambda+1 \\ y=-\lambda+3 \\ z=\quad \lambda \end{cases}$$

Reemplazamos en la ecuación del plano $x+y+z=0$ *cada una de las variables entonces resulta :*

$$-2\lambda+1\cancel{-\lambda}+3\cancel{+\lambda}=0 \Rightarrow -2\lambda+4=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=2}$$

Reemplazamos λ *en la ecuación paramétrica de la recta*

$$\begin{cases} x=-2.2+1=-3 \\ y=-2+3=1 \\ z=\quad 2 \end{cases}$$

Luego el punto que pertenece a la recta y el plano es $\boxed{(-3;1;2)}$

Respuesta correcta es la ***a)***

✓ ***Ejercicio 10***

Los valores de α ***y*** β ***para que el sistema*** $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 5x-10y+\alpha z=\beta \end{cases}$ ***sea incompatible son:***

☐ *a)* $\alpha \neq 5$ *y* $\forall \beta \in \Re$	☐ ***b)*** $\alpha = 5$ *y* $\beta \neq 15$
☐ *c)* $\alpha = 5$ *y* $\beta = 15$	☐ ***d)*** $\alpha \neq 5$ *y* $\beta \neq 15$

Escribimos la matriz ampliada del sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 5x-10y+\alpha z=\beta \end{cases}$ *y resolvemos usando el método de Gauss Jordan*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \underline{\underline{1}} & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -10 & \alpha & \beta \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha-5 & \beta-15 \end{array}\right)$$

Para que el sistema sea incompatible debe ocurrir que $\boxed{\alpha = 5 \wedge \beta \neq 15}$

Respuesta correcta es la ***b)***