✓ ***Ejercicio 1***

1) En una economía hipotética de dos industrias A y B la matriz de los coeficientes tecnológicos es $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{3}{8}\\ \frac{3}{16} & \frac{3}{8}\end{pmatrix}$. ***Si la demanda final es*** $DF=\begin{pmatrix}153\\238\end{pmatrix}$

a) Hallar el nuevo vector producción
b) Completar el nuevo cuadro

a) El vector producción se encuentra resolviendo la siguiente ecuación matricial: $X=(I-A)^{-1}.DF$

Calculamos la matriz de Leontieff $I-A$ ***, posteriormente calculamos la matriz de los requerimientos directos e indirectos*** $(I-A)^{-1}$ ***y por último realizamos el producto indicado a fin de conocer el Producto Final correspondiente***

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{3}{8}\\ \frac{3}{16} & \frac{3}{8}\end{pmatrix}\Rightarrow I-A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{3}{8}\\ \frac{3}{16} & \frac{3}{8}\end{pmatrix}=\boxed{I-A=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & -\frac{3}{8}\\ -\frac{3}{16} & \frac{5}{8}\end{pmatrix}}$$

Debemos encontrar $\boxed{(I-A)^{-1}=\frac{1}{|I-A|}adj(I-A)}$

$$|I-A|=\begin{vmatrix}\frac{3}{4} & -\frac{3}{8}\\ -\frac{3}{16} & \frac{5}{8}\end{vmatrix}=\frac{3}{4}.\frac{5}{8}-\left(-\frac{3}{16}\right).\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{15}{32}-\frac{9}{128}=\frac{51}{128}\quad\Rightarrow\quad\boxed{|I-A|=\frac{51}{128}}$$

Trasponemos la matriz $\Rightarrow (I-A)^T=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & -\frac{3}{16}\\ -\frac{3}{8} & \frac{5}{8}\end{pmatrix}$, ***hallamos su adjunta,*** $\boxed{Adj(I-A)=\begin{pmatrix}\frac{5}{8} & \frac{3}{8}\\ \frac{3}{16} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}}$

$$\Rightarrow (I-A)^{-1}=\frac{1}{\frac{51}{128}}\begin{pmatrix}\frac{5}{8} & \frac{3}{8}\\ \frac{3}{16} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{8}\cdot\frac{128}{51} & \frac{3}{8}\cdot\frac{128}{51}\\ \frac{3}{16}\cdot\frac{128}{51} & \frac{3}{4}\cdot\frac{128}{51}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{80}{51} & \frac{16}{17}\\ \frac{8}{17} & \frac{32}{17}\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{80}{51} & \frac{16}{17}\\ \frac{8}{17} & \frac{32}{17}\end{pmatrix}}$$

$$X=\ (I-A)^{-1}\cdot DF\Rightarrow X=\begin{pmatrix}\frac{80}{51} & \frac{16}{17}\\ \frac{8}{17} & \frac{32}{17}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}153\\238\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{80}{51}.153+\frac{16}{17}.238\\ \frac{8}{17}.153+\frac{32}{17}.238\end{pmatrix}\quad\boxed{X=\begin{pmatrix}464\\520\end{pmatrix}}$$

b) La nueva tabla es

	A	B	DF	PT
A	$\frac{1}{4}.464=116$	$\frac{3}{8}.520=195$	153	464
B	$\frac{3}{16}.464=87$	$\frac{3}{8}.520=195$	238	520
VA	261	130	391	✕
PT	464	520	✕	984

✓ *Ejercicio 2*

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}$ *e* $I\in\Re^{2x2}$

a) *Hallar la matriz* A^{-1}

b) *Hallar la matriz* $X\in\Re^{2x2}\ /\ A\cdot X+2B=I$

a) $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix}=1.5-2.2=1\Rightarrow\boxed{|A|=1}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}\Rightarrow A^{T}=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{Adj\,A=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj\,A=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}}$$

b) $A\cdot X+2B=I\quad\Rightarrow\boxed{X=A^{-1}\left(I-2B\right)}$ ⁂

Reemplazamos en la expresión ⁂

$$X=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}\right]$$

$$X=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&2\\0&6\end{pmatrix}\right]$$

$$X=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-4&0-2\\0-0&1-6\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&-2\\0&-5\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}5.(-3)+(-2).0&5.(-2)+(-2)(-5)\\-2.(-3)+1.0&-2.(-2)+1(-5)\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-15&0\\6&-1\end{pmatrix}}$$

✓ *Ejercicio 3*

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ n+1 & -1 & 0 \\ n & n-1 & 5 \end{pmatrix}$ *se puede afirmar que:*

☐ *a)* $r(A) = 3, \forall n \in \Re$	☐ *b)* $r(A) = 2, \forall n \in \Re$
☐ *c)* $r(A) \neq 3$ *porque depende del valor de n*	☐ *d)* $r(A) = 1, \forall n \in \Re$

Dada una matriz cuadrada de orden n entonces $\begin{cases} |A| \neq 0 \Rightarrow r(A) = n \\ \text{ó} \\ |A| = 0 \Rightarrow r(A) < n \end{cases}$

Calculamos el determinante de la matriz A.

Como es una matriz triangular inferior, su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ n+1 & -1 & 0 \\ n & n-1 & 5 \end{vmatrix} = 2.(-1).5 = -10 \neq 0$$

A *es una matriz de orden* 3 *y* $|A| = -10 \neq 0 \Rightarrow \boxed{r(A) = 3}$

Respuesta correcta: a)

✓ *Ejercicio 4*

El o los valores de $\alpha,\beta\in\Re$ *para que el sistema* $\begin{cases}3x+y+(\alpha+1)z=4\\ -y+\ 3z=\beta\\ 2x+y-z=3\end{cases}$ *sea compatible indeterminado son:*

☐ *a)* $\alpha\neq-1\vee\ \beta\neq-1$	☐ *b)* $\forall\alpha,\beta\in\Re$
☐ *c)* $\alpha=-1\wedge\ \beta=-1$	☐ *d)* $\nexists\alpha,\beta\in\Re$

Escribimos la matriz ampliada correspondiente al sistema dado y luego aplicamos triangulamos la matriz utilizando el método de eliminación gaussiana

$$\begin{cases}3x+y+(\alpha+1)z=4\\ -y+\ 3z=\beta\\ 2x+y-z=3\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}3&1&\alpha+1&4\\0&-1&3&\beta\\2&1&-1&3\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c}3&1&\alpha+1&4\\0&-1&3&\beta\\2&1&-1&3\end{array}\right)3F_3-2F_1\left(\begin{array}{ccc:c}3&1&\alpha+1&4\\0&-1&3&\beta\\0&1&-5-2\alpha&1\end{array}\right)F_3+F_2\left(\begin{array}{ccc:c}3&1&\alpha+1&4\\0&-1&3&\beta\\0&0&-2-2\alpha&1+\beta\end{array}\right)$$

El ejercicio pide que el sistema sea compatible indeterminado por lo tanto tiene infinitas soluciones, para que esto suceda debe anularse la última fila

$$SCI\Leftrightarrow(-2-2\alpha=0\wedge1+\beta=0)\therefore\boxed{SCI\Leftrightarrow(\alpha=-1\wedge\beta=-1)}$$

Respuesta correcta: c)

✓ ***Ejercicio 5***

Sabiendo que $A,B,C \in \Re^{2x2}$*, tales que* $|A| = 2, |B| = 3, |C| = 4$*. Si* $M \in \Re^{2x2} \,/\, A\,.\,M\,.\,B = C$ *entonces:*

☐ *a)* $M = B^{-1}\cdot C\cdot A^{-1}$ *y* $\lvert M\rvert = 2/3$	☐ *b)* $M = B^{-1}\cdot C\cdot A^{-1}$ *y* $\lvert M\rvert = 24$
☐ *c)* $M = A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$ *y* $\lvert M\rvert = 2/3$	☐ *d)* $M = B^{-1}\cdot A^{-1}\cdot C$ *y* $\lvert M\rvert = 24$

Resolvemos la ecuación

$A\,.\,M\,.\,B = C$

$A^{-1}.(A\,.\,M\,.\,B) = A^{-1}.C$ — *Multiplico miembro a miembro por la izquierda por la inversa de P*

$(A^{-1}.A)\,.\,M\,.\,B = A^{-1}.C$ — *Aplico propiedad asociativa*

$I\,.\,M\,.\,B = A^{-1}.C$ — *Por definición de inversa*

$M\,.\,B = A^{-1}.C$ — *Por se I neutro de la multiplicación de matrices*

$(M\,.\,B).B^{-1} = A^{-1}.C.B^{-1}$ — *Multiplico miembro a miembro por la izquierda por la inversa de Q*

$M\,.(B.B^{-1}) = A^{-1}.C.B^{-1}$ — *Aplico propiedad asociativa*

$M\,.\,I = A^{-1}.C.B^{-1}$ — *Por definición de inversa*

$M = A^{-1}.C.B^{-1}$ — *Por se I neutro de la multiplicación de matrices*

$\therefore \boxed{M = A^{-1}.C.B^{-1}}$

Calculamos el determinante de la matriz M

$M = A^{-1}.C.B^{-1} \Rightarrow$

$|M| = |A^{-1}.C.B^{-1}|$ — *Aplico determinante miembro a miembro en la igualdad*

$|M| = |A^{-1}|.|C|.|B^{-1}|$ — *En el segundo miembro aplico la propiedad de determinante de un producto*

$|M| = \frac{1}{|A|}\cdot|C|\cdot\frac{1}{|B|}$ — *En el segundo miembro aplico la propiedad del determinante de la inversa de una matriz*

$|M| = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{1}{3}$ — *Reemplazo por los valores del enunciado*

$\therefore \boxed{|M| = \frac{2}{3}}$

Respuesta correcta: c)

✓ *Ejercicio 6*

La ecuación simétrica de la recta r que pasa por el punto $A=(2;3;1)$ *y es paralela a la recta de ecuación* $s:\frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$ *es:*

☐ *a)* $\frac{x+3}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}$	☐ *b)* $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-1}{2}$
☐ *c)* $(x;y;z)=(2;3;1)+\lambda(3;-1;2)$	☐ *d)* $(x;y;z)=(-1;-3;0)+\lambda(5;5;3)$

La expresión simétrica de una recta que pasa por $A=(x_0;y_0;z_0)$ *y tiene vector director* $\vec{v}=(v_x;v_y;v_z)$ *es:*

$$\frac{x-x_0}{v_x}=\frac{y-y_0}{v_y}=\frac{z-z_0}{v_z}$$

De la recta s dato del problema, obtenemos el vector director

$$s:\frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}\Rightarrow\boxed{\vec{v}_s=(3;-1;2)}$$

Luego como

$r\parallel s\Leftrightarrow\vec{v}_r\parallel\vec{v}_s$ *reemplazando se obtiene la recta pedida* $\boxed{r:\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-1}{2}}$

Respuesta correcta: b)

✓ ***Ejercicio 7***

Sea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ***sabiendo que*** $|A|=4$***, los determinantes:*** $\left|-3A^T\right|$ ***y*** $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2a & 2b \end{vmatrix}$ ***son respectivamente:***

☐ ***a)*** $-12,-24$	☐ ***b)*** $-36,24$
☐ ***c)*** $-36,-24$	☐ ***d)*** $36,-24$

Sabemos por el enunciado que $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=4 \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4$

$$\left|-3A^T\right| \underset{|kA|=k^n|A|}{=} (-3)^2\left|A^T\right| \underset{\left|A^T\right|=|A|}{=} (-3)^2|A| \underset{|A|=4}{=} 9.4=36 \Rightarrow \boxed{\left|-3A^T\right|=36}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2a & 2b \end{vmatrix} \underset{1}{=} 3.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2a & 2b \end{vmatrix} \underset{2}{=} 3.2.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{vmatrix} \underset{3}{=} 3.2.(-1).\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{4}{=} 3.2.(-1).|A| \underset{5}{=} 3.2.(-1).4=-24 \Rightarrow \boxed{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2a & 2b \end{vmatrix}=-24}$$

1) Factoreamos la primera fila del determinante

2) Factoreamos la segunda fila del determinante

3) La matriz que resulta del factoreo de ambas filas tiene las filas permutadas

4) Reemplazamos por el determinante de A

5) Reemplazamos por el valor del determinante de A y operamos

Respuesta correcta: d)

✓ *Ejercicio 8*

El conjunto de los $k \in \Re$ *tales que la matriz* $A = \begin{pmatrix} 3 & -k & 0 \\ k & 3 & 1 \\ k & 3 & k \end{pmatrix}$ *sea regular es:*

☐ *a)* $\varnothing$	☐ *b)* $\Re - \{1\}$
☐ *c)* $\Re$	☐ *d)* $\{1\}$

A es regular $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

Calculamos el determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -k & 0 \\ k & 3 & 1 \\ k & 3 & k \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & k \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-k)\begin{vmatrix} k & 1 \\ k & k \end{vmatrix} = 3(3k-3) + k\left(k^2 - k\right) = 9k - 9 + k^3 - k^2 = k^3 - k^2 + 9k - 9 \therefore$$

$$|A| = k^3 - k^2 + 9k - 9 = (k-1)\underbrace{\left(k^2+9\right)}_{\substack{\text{no tiene} \\ \text{raices reales}}} \Rightarrow \boxed{|A| = (k-1)\left(k^2+9\right)}$$

El valor de $k \in \Re$ *que anula el determinante es* $k = 1$

Pero necesitamos que la matriz sea regular, o sea que su determinante no se anule entonces

$\boxed{A \text{ es regular } \Leftrightarrow k \neq 1}$ *Expresamos la solución en lenguaje conjuntista:* $\boxed{A \text{ es regular } \Leftrightarrow k \in \Re - \{1\}}$

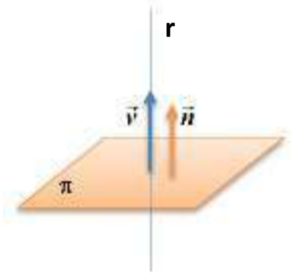
Respuesta correcta: b)

✓ *Ejercicio 9*

Sea la recta r que pasa por los puntos $A=(1;0;1)$ y $B=(1;-1;0)$ entonces la ecuación del plano π que pasa por $C=(-1;2;3)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A y B es:

☐ *a)* $\pi:(-1;2;3)+\lambda(0;-1;-1)$	☐ *b)* $\pi:-x+2y+3z+5=0$
☐ *c)* $\pi:-y-z+5=0$	☐ *d)* $\pi:(0;-1;-1)+\lambda(-1;2;3)$

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(1;-1;0)-(1;0;1)=(0;-1;-1)\Rightarrow\boxed{\overrightarrow{AB}=(0;-1;-1)}$$



$$\pi\perp r\Rightarrow\vec{n}\parallel\vec{v}$$

$$(x+1;y-2;z-3).(0;-1;-1)=0$$
$$\cancel{(x+1).0}+(y-2).(-1)+(z-3).(-1)=0$$
$$-y+2-z+3=0$$
$$\boxed{\pi:-y-z+5=0}$$

Respuesta correcta: c)

✓ ***Ejercicio 10***

Sea $A \in \Re^{nxn}$ ***tal que*** $A \cdot A^T = I_n$ $(I_n$ ***matriz identidad de orden*** $n)$ ***, se cumple que:***

☐ *a)* $\|A\| = \pm 2$	☐ *b)* $\|A\| = 0$
☐ *c)* $\|A\| = \pm 1$	☐ *d)* $\|A\| = n$

Sabemos que $A.A^T = I$

Aplicamos miembro a miembro determinante entonces resuelta $|A.A^T| = |I|$

En el primer miembro aplicamos $|A.B| = |A|.|B|$ ***y en el segundo*** $|\ I\ | = 1$

Aplicamos las propiedades y resulta $|A|.|A^T| = 1$

Sabemos que $|A^T| = |A|$

Reemplazamos $|A|.|A| = 1$

Luego $(|A|)^2 = 1 \Rightarrow \boxed{|A| = \pm 1}$

Respuesta correcta: c)