**Examen final – Resuelto Tema 4**

**Ecuación de un plano**

(1 pt) Hallen una ecuación implícita para el plano $\Pi$ que es paralelo a la recta $L = \{X \in R^3 : X = t(1;1;-1) + (0;1;2), t \in R\}$ y contiene a la recta $R = \{X \in R^3 : X = k(-1;-1;0) + (1;1;2),\ k \in R\}$

Si $\Pi$ es paralelo a $L$ y contiene a $R$, se puede definir un vector normal al plano a partir del producto vectorial de los vectores directores de las rectas:

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1;1;0)$$

Como punto del plano, elegimos el punto de la recta $R$. Luego:

$$\Pi: -x + y = d \to -1 + 1 = d \to 0 = d \to \Pi: -x + y = 0$$

**Respuesta**: $\boxed{\Pi: -x + y = 0}$

---

**Distancia de punto a recta**

(1 pt) Hallen la distancia del punto $P = (1;1;1)$ a la recta $L = \{X \in R^3 : X = t(-1;-2;-1) + (-1;4;7), t \in R\}$

Definimos la ecuación de un plano perpendicular a L que contenga al punto $P$ dado. Para ello, utilizamos como vector normal al plano el vector director de la recta:

$$\Pi: [(x;y;z) - (1;1;1)](-1;-2;-1) = 0$$
$$\Pi: -(x-1) - 2(y-1) - (z-1) = 0$$
$$\Pi: -x - 2y - z + 4 = 0 \to \Pi: 4 = x + 2y + z$$

Buscamos el punto $Q$ de intersección entre la recta y el plano, reemplazando las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación del plano:

$$4 = (-t-1) + 2(-2t+4) + (-t+7)$$
$$6t = 10 \to t = \frac{5}{3} \to Q = \left(-\frac{8}{3}; \frac{2}{3}; \frac{16}{3}\right)$$

La distancia entre $P$ y $L$ es la distancia entre $P$ y $Q$:

$$Dist(P;Q) = \sqrt{\left(-\frac{8}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{16}{3} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{291}}{3}$$

**Respuesta**: $\boxed{\frac{\sqrt{291}}{3}}$

---

**Subespacios**

Señalen con una cruz la única opción correcta en cada uno de los siguientes enunciados.

a) (0,5 pt) El conjunto $\langle(2;-1;-2);(1;4;-3);(-9;k;15)\rangle$ es una base de $R^3$ cuando $k$ es distinto de:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \\ -9 & k & 15 \end{vmatrix} \to \begin{matrix} F_1 \\ F_1 - 2F_2 \\ 9F_1 + 2F_3 \end{matrix} \to \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & -9 & 4 \\ 0 & -9+2k & 12 \end{vmatrix} \to \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ (-9+2k)F_2 + 9F_3 \end{matrix} \to \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & 8k+72 \end{vmatrix}$$

Si $8k + 72 \neq 0 \to$ la matriz tiene rango 3 y los tres vectores son linealmente independientes: forman base.
Luego $8k + 72 \neq 0 \to k \neq -9$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $9$ | X | $-9$ | | $-15$ | | $3$ |

b) (0,5 pt) Para el valor de $k$ hallado en el ítem anterior, la dimensión del subespacio $\langle(-2;1;-2);(3;-1;5);(13;k;19)\rangle$ es:

Si $k = -9 \to$ el rango de la matriz es 2 porque se anula la última fila. Luego esa será la dimensión del subespacio.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $1$ | | $3$ | X | $2$ | | $4$ |

---

**Cónicas**
Calculen el centro y la excentricidad de la hipérbola de ecuación: $x^2+6x-y^2-10y+9=0$

Completamos cuadrados en la igualdad: $x^2+6x-y^2-10y+9=0$

$$(x^2+6x+9)-9-[(y^2+10y+25)-25]+9=0$$
$$(x+3)^2-(y+5)^2-9+25+9=0$$
$$(x+3)^2-(y+5)^2=-25$$
$$\frac{(x+3)^2}{-25}-\frac{(y+5)^2}{-25}=\frac{-25}{-25}$$
$$\frac{(y+5)^2}{25}-\frac{(x+3)^2}{25}=1$$

$$a=b=5\rightarrow c^2=a^2+b^2\rightarrow c^2=50\rightarrow c=5\sqrt{2}$$

(0,5 pt) **Centro**: $\boxed{(-3;-5)}$ (0,5 pt) **Excentricidad**: $\boxed{e=\sqrt{2}}$

---

**Sistemas de ecuaciones lineales**
(1 pt) Hallen todos los valores de $m,p\in R$ tales que $(1;0;-1)$ es una de las infinitas soluciones del sistema:

$$\begin{cases} y=2z+2 \\ mz+2=py \\ x+y+4z+3=0 \end{cases}$$

Si $(1;0;-1)$ es una de las infinitas soluciones, verifica las ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} 0=2(-1)+2\rightarrow \text{verifica} \\ m(-1)+2=p(0)\rightarrow m=2 \\ 1+0+4(-1)+3=0\rightarrow \text{verifica} \end{cases}$$

Si $m=2$ el sistema se reescribe como:

$$\begin{cases} y=2z+2 \\ 2z+2=py \\ x+y+4z+3=0 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x+y+4z=-3 \\ -py+2z=-2 \\ y-2z=2 \end{cases}$$

Analicemos el sistema en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -p & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right)\rightarrow\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_2+pF_3 \end{array}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2-2p & -2+2p \end{array}\right)$$

Si $2-2p\neq 0\rightarrow p\neq 1$ el sistema tendrá solución. Luego:

**Respuesta**: $\boxed{p=1, m=2}$

---

**Determinantes**
Señalen con una cruz la única opción correcta en cada uno de los siguientes enunciados.

a) (0,5 pt) Si $M,N\in R^{3\times 3}$ son tales que $\det(N)=8$ y $\det(M\cdot N)=9$ entonces $\det(3M^{-1})$ es igual a:

$\det(M\cdot N)=9\rightarrow \underbrace{\det(N)}_{8}\cdot\det(M)=9\rightarrow\det(M)=\frac{9}{8}\rightarrow\det(M^{-1})=\frac{8}{9}$
Luego: $\det(3M^{-1})=3^3\cdot\det(M^{-1})=27\cdot\frac{8}{9}=24$

☐ $\frac{27}{8}$ ☐ $\frac{24}{9}$ ☐ $\frac{8}{9}$ ☒ 24

b) (0,5 pt) Si $\det\begin{pmatrix} m & n \\ q & p \end{pmatrix} = 7$ entonces $\det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ m & n & m & 0 \\ q & p & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es:

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ m & n & m & 0 \\ q & p & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{=}_{\text{por la fila 1}} 3\begin{vmatrix} n & m & 0 \\ p & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} m & n & 0 \\ q & p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\text{por la fila 3}} 3\begin{vmatrix} n & m \\ p & q \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} m & n \\ q & p \end{vmatrix}$$

$$= -3\begin{vmatrix} m & n \\ q & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n \\ q & p \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} m & n \\ q & p \end{vmatrix} = -2 \cdot 7 = -14$$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | $-14$ | | $28$ | | $7$ | | $-7$ |

## Transformaciones lineales

Señalen con una cruz la única opción correcta en cada uno de los siguientes enunciados.

a) (0,75 pt) Si $T: R^2 \to R^2$ es el deslizamiento cortante de factor 6 en la dirección del eje $x$ entonces $T(-2; 4)$ es igual a:

$$T(x;y)_{k=6,\text{eje } x} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to T(-2;4)_{k=5,\text{eje } y} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = (1 \cdot (-2) + 6 \cdot 4; 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 4) = (22; 4)$$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | $(22;4)$ | | $(-2;-8)$ | | $(6;-4)$ | | $(-12;4)$ |

b) (0,75 pt) La transformación lineal $T: R^2 \to R^2$ cuya matriz canónica asociada es $A_T = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ transforma el cuadrado unitario de $R^2$ en un paralelogramo cuya área es:

$$\det(A_T) = \begin{vmatrix} -5 & -10 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -5(-3) - 5(-10) = 15 + 50 = 65$$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $50$ | | $\frac{65}{2}$ | X | $65$ | | $35$ |

## Números complejos

Calculen el módulo y el argumento de $z = (3i)(1-i)^{13}$

- $3i = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$
- $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right) \to (1-i)^{13} = 2^{\frac{13}{2}}\left(\cos\frac{91}{4} + i \operatorname{sen}\frac{91\pi}{4}\right)$
- $(-1+i)^{11}(-2i) = 3 \cdot 2^{\frac{13}{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{91\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{91\pi}{4}\right)\right)$
- $\frac{\pi}{2} + \frac{91\pi}{4} = \frac{93\pi}{4} = \underbrace{\frac{88\pi}{4}}_{\text{vueltas completas}} + \frac{5\pi}{4}$

(0,5 pt) **Módulo**: $\boxed{3 \cdot 2^{\frac{13}{2}}}$ (0,5 pt) **Argumento**: $\boxed{\frac{5\pi}{4}}$

## Polinomios

Respondan a cada una de las siguientes consignas:

a) (0,5 pt) Si $P(x) \in R[X]$ tiene como raíces a $2 + i; \sqrt{7}; 1 + \sqrt{5}$ entonces el mínimo grado posible de $P(x)$ es:

Si $P(x) \in R[X]$además de ser raíz $2 + i$ también lo es $2 - i$. Con las raíces $1 + \sqrt{5}$ y $\sqrt{7}$ tenemos un total de 5 raíces para un polinomio de coeficientes reales. Luego, el mínimo grado posible es 5.

**Respuesta**: $\boxed{4}$

b) (0,5 pt) El polinomio $Q(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4x + 5)(x^3 - x^2 - 4x + 4)$ tiene en $C[X]$:

- $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$
- $x^2 - 4x + 5 = 0 \to x_1, x_2 = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} \to x^2 - x + 2 = \big(x - (2 + i)\big)\big(x - (2 - i)\big)$
- $x^3 - x^2 - 4x + 4 = x^2(x - 1) - 4(x - 1) = (x^2 - 4)(x - 1) = (x - 2)(x + 2)(x - 1)$

$$Q(x) = (x - 1)^2(x + 1)(x - 2)(x + 2)\big(x - (2 + i)\big)\big(x - (2 - i)\big)$$

**Respuesta**: 1 (una) raíz doble y 5 (cinco) raíces simples.

c) (0,5 pt) La expresión factorizada de $Q(x)$ del ítem b) en $C[X]$ es:

**Respuesta**: $Q(x) = (x - 1)^2(x + 1)(x - 2)(x + 2)(x - 2 - i)(x - 2 + i)$

---