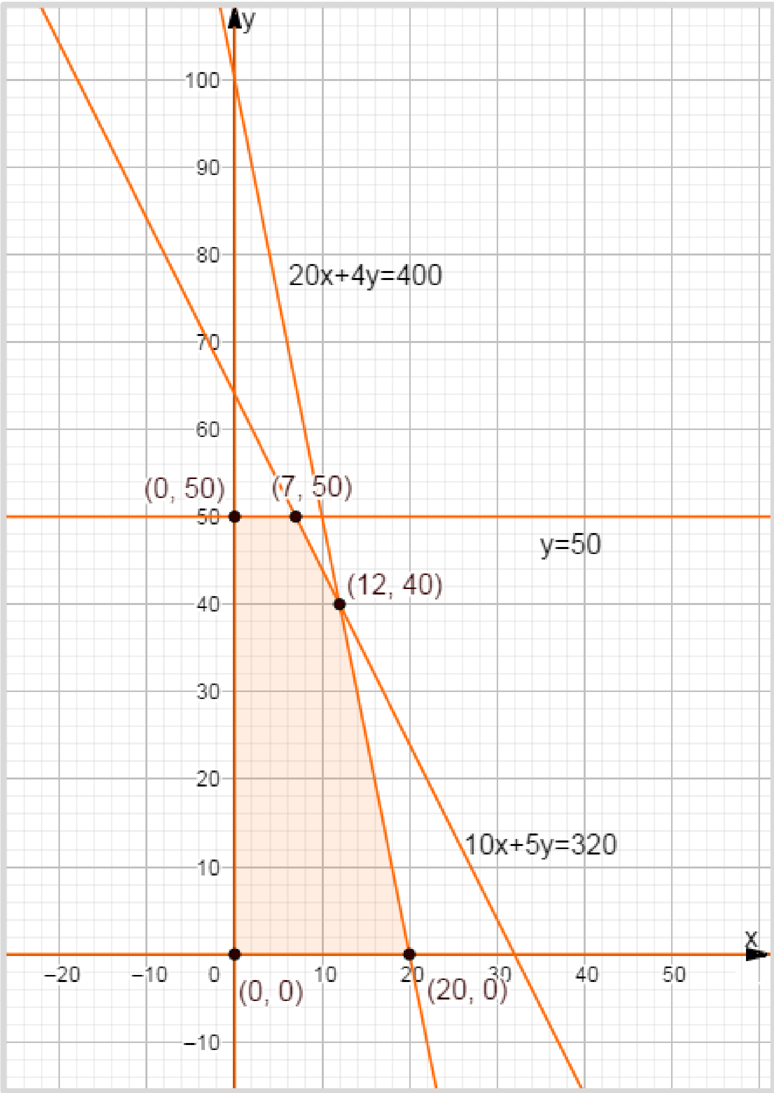
- ***Ejercicio 1***

Una compañía de auditores se especializa en preparar liquidaciones y auditorías de Pymes. Tienen interés en saber cuántas auditorías y liquidaciones pueden realizar mensualmente para maximizar sus ingresos. Se dispone de 400 horas de trabajo directo y 320 horas para revisión. Una auditoría en promedio requiere de 20 horas de trabajo directo y 10 horas de revisión, además aporta un ingreso de 600 u.ms. Una liquidación de impuesto requiere de 4 horas de trabajo directo y de 5 horas de revisión, produce un ingreso de 200 u.ms. El máximo de liquidaciones mensuales disponibles es de 50.

a) Plantear el problema

b) Hallar el programa que maximiza el ingreso empleando el método gráfico

Con los datos del enunciado planteamos el problema:



Maximizar el ingreso $Z = 600x + 200y$

Sujeto a $\begin{cases} 20x + 4y \le 400 \\ 10x + 5y \le 320 \\ y \le 50 \end{cases}$ ***con*** $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

$$Z(x;y) = 600x + 200y$$

$$Z(0;0) = 600.0 + 200.0 = 0$$

$$Z(0;50) = 600.0 + 200.50 = 10000$$

$$Z(7;50) = 600.7 + 200.50 = 14200$$

$$\boxed{Z(12;40) = 600.12 + 200.40 = 15200}$$

$$Z(20;0) = 600.20 + 200.0 = 12000$$

Solución óptima

X = 12 auditorías

Y = 40 liquidaciones

Z = $ 15200

✓ *Ejercicio 2*

> *2) Sea* $T=\{(1;2;3),(1;3;-1),(0;1;-4)\}\subset\Re^3$
>
> *a) Hallar* $\bar{T}$
>
> *b) Hallar* $h\in\Re$*, si existen tal que* $\vec{u}=(3;8;h)\in\bar{T}$

a) Planteamos la combinación lineal de los vectores de $T=\{(1;2;3),(1;3;-1),(0;1;-4)\}\subset\Re^3$ *e igualamos a un vector genérico* $(x;y;z)\in\Re^3$ *para determinar* $\bar{T}$ *o sea el subespacio generado por la familia* T *.*

$\alpha(1;2;3)+\beta(1;3;-1)+\gamma(0;1;-4)=(x;y;z)$ *Aplicamos la multiplicación por un escalar y la adición de los vectores*

$(\alpha+\beta;2\alpha+3\beta+\gamma;3\alpha-\beta-4\gamma)=(x;y;z)$ *Igualamos los vectores* $\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=x\\2\alpha+3\beta+\gamma=y\\3\alpha-\beta-4\gamma=z\end{cases}\Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\underline{\underline{1}}&1&0&x\\2&3&1&y\\3&-1&-4&z\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&x\\0&\underline{\underline{1}}&1&y-2x\\0&-4&-4&z-3x\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&3x-y\\0&1&1&y-2x\\0&0&0&-11x+4y+z\end{array}\right)$$

Para obtener el subespacio generado por la familia de vectores el sistema debe ser compatible y para ello debe cumplirse que $-11x+4y+z=0$*, por lo tanto*

$\boxed{\bar{T}=\{(x;y;z)\in\Re^3\,/\,-11x+4y+z\}}$ *ó* $\boxed{\bar{T}=\{(x;y;z)\in\Re^3\,/\,z=11x-4y\}}$

b) Si el vector $\vec{u}=(3;8;h)$ *pertenece al subespacio generado por T, debe ser un vector que cumpla con la condición de los vectores que forman parte de* $\bar{T}$*, o sea que la tercera componente sea igual a once veces la primera menos cuatro veces la segunda, por lo tanto:*

$\vec{u}=(3;8;h)\in T\Rightarrow h=11.3-4.8\Rightarrow\boxed{h=1}$

Otra forma de encontrar el o los valores de h es escribir al vector como CL de la familia y resolver el sistema que resulta:

$\alpha(1;2;3)+\beta(1;3;-1)+\gamma(0;1;-4)=(3;8;h)$ *Operando entonces resulta:*

$(\alpha+\beta;2\alpha+3\beta+\gamma;3\alpha-\beta-4\gamma)=(3;8;h)$ *Igualamos los vectores* $\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=3\\2\alpha+3\beta+\gamma=8\\3\alpha-\beta-4\gamma=h\end{cases}\Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\underline{\underline{1}}&1&0&3\\2&3&1&8\\3&-1&-4&h\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&3\\0&\underline{\underline{1}}&1&2\\0&-4&-4&h-9\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&1\\0&1&1&2\\0&0&0&h-1\end{array}\right)$$

Para obtener el valor de h, el sistema debe ser compatible, debe cumplirse que $h-1=0\Rightarrow\boxed{h=1}$

✓ *Ejercicio 3*

Dada la familia de vectores de $\Re^3$, $A=\{(k;-k;1),(1;1;-1),(1;k+1;1)\}$ *, el conjunto de los* $k\in\Re$ *para el cual los vectores del conjunto son linealmente independiente es:*

- ☐ *a)* $\{-5,0\}$
- ☐ *b)* $\Re-\{-5,0\}$
- ☐ *c)* $\varnothing$
- ☐ *d)* $\Re$

Un conjunto de vectores es linealmente independiente cuando la una única combinación lineal que da el vector nulo es la trivial.

Planteamos la combinación lineal de los vectores dela familia $A=\{(k;-k;1),(1;1;-1),(1;k+1;1)\}$ ***e igualamos al vector*** $(0;0;0)$

$$\alpha(k;-k;1)+\beta(1;1;-1)+\gamma(1;k+1;1)=(0;0;0)$$

Operando e igualando al vector nulo, resulta el siguiente sistema $\begin{cases} k\alpha+\beta+\gamma=0 \\ -k\alpha+\beta+(k+1)\gamma=0 \\ \alpha-\beta+\gamma=0 \end{cases}$

El sistema de ecuaciones lineales es un sistema homogéneo y cuadrado, por lo tanto para que exista una única solución, o sea la trivial, el sistema debe ser compatible determinado, ya que se pide que la familia sea linealmente independiente, el determinante de la matriz de los coeficientes debe ser distinto de cero

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 0 \\ -k & 1 & k+1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ -k & 1 & k+1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ -k & 1 & k+1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k.\begin{vmatrix} 1 & k+1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} -k & k+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} -k & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = k.(1+k+1)-1.(-k-k-1)+1.(k-1)=$$

$$=k.(k+2)-1.(-2k-1)+1.(k-1)=k^2+2k+2k\cancel{+1}+k\cancel{-1}=k^2+5k \underbrace{=}_{factoreamos} k(k+5)$$

Resolvemos $k(k+5)\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} k\neq 0 \\ \wedge \\ k+5\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k\neq 0 \\ \wedge \\ k\neq -5 \end{cases}$

Luego el conjunto que satisface que la familia sea LI es $\boxed{\Re-\{-5,0\}}$

La respuesta correcta es la b)

✓ ***Ejercicio 4***

Si el vector de precios es un múltiplo escalar de $(2;5;5)$, *una posibilidad de consumo es* $(x_1;x_2;x_3)=(10;20;20)$. *Y el ingreso es de* I = $660, *entonces la ecuación presupuestaria es:*

- ☐ *a)* $6x_1+15x_2+15x_3=660$
- ☐ *b)* $10x_1+20x_2+20x_3=660$
- ☐ *c)* $2x_1+5x_2+5x_3=660$
- ☐ *d)* $\frac{x_1}{6}+\frac{x_2}{15}+\frac{x_3}{15}=1$

Si el vector de precios es un múltiplo escalar de $(2;5;5)$ ***entonces*** $\vec{p}=\alpha(2;5;5)=(2\alpha;5\alpha;5\alpha)$

Planteamos la ecuación presupuestaria y reemplazamos la posibilidad de consumo $(x_1;x_2;x_3)=(10;20;20)$ ***para determinar el valor de*** α

$p_1.x_1+p_2.x_2+p_3.x_3=I$ ***Ecuación presupuestaria***

$2\alpha.x_1+5\alpha.x_2+5\alpha.x_3=660$

$2\alpha.10+5\alpha.20+5\alpha.20=660$

$20\alpha+100\alpha+100\alpha=660$

$220\alpha=660\Rightarrow\boxed{\alpha=3}$

Entonces el vector precio es $\vec{p}=3(2;5;5)=(3.2;3.5;3.5)\Rightarrow\boxed{\vec{p}=(6;15;15)}$

Luego reemplazando la ecuación presupuestaria es: $\boxed{6x_1+15x_2+15x_3=660}$

La respuesta correcta es la a)

✓ *Ejercicio 5*

Sea $Z = 9x + 2y$ *sujeta a las siguientes restricciones:* $\begin{cases} x + y \le 3 \\ 3x + 4y \le 12 \end{cases}$ *con* $x \ge 0\,, y \ge 0$

La solución óptima que maximiza Z es

☐ *a)* $(x; y; S_1; S_2) = (3;7;3;0)$ $Z = 27$	☐ *b)* $(x; y; S_1; S_2) = (3;7;9;3)$ $Z = 27$
☐ *c)* $(x; y; S_1; S_2) = (0;7;9;0)$ $Z = 27$	☐ *d)* $(x; y; S_1; S_2) = (3;0;0;3)$ $Z = 27$

Convertimos las restricciones en igualdades sumando las variables de holgura $\begin{cases} x + y + S_1 = 3 \\ 3x + 4y + S_2 = 12 \\ x, y \ge 0 \\ S_1, S_2 \ge 0 \end{cases}$

Planteamos la primera tabla del simplex:

	C_j	9	2	0	0	Valor de la solución	
C_k	X_k	x	y	S_1	S_2	b	
0	S_1	1	1	1	0	3	3/1=3 ↦VS
0	S_2	3	4	0	1	12	12/3=4
Z_j		0	0	0	0	0	
$C_j - Z_j$		$9-0=9$	$2-0=2$	$0-0=0$	$0-0=0$		
		↥ V.E					

	C_j	9	2	0	0	Valor de la solución
C_k	X_k	x	y	S_1	S_2	b
9	x	1	1	1	0	3
0	S_2	0	1	-3	1	3
Z_j		9	9	9	0	27
$C_j - Z_j$		$9-9=0$	$2-9=-7$	$0-9=-9$	$0-0=0$	

La solución óptima es $\boxed{(x; y; S_1; S_2) = (3;0;0;3) \quad Z = 27}$

La respuesta correcta es la d)

✓ *Ejercicio 6*

La dimensión del subespacio solución del sistema homogéneo asociado al sistema $\begin{cases} 2x + 4z = 0 \\ -2y + 8z = 3 \end{cases}$ *es:*

- ☐ *a)* $\dim S = 0$
- ☐ *b)* $\dim S = 1$
- ☐ *c)* $\dim S = 2$
- ☐ *d)* $\dim S = 3$

Debemos encontrar la solución del sistema homogéneo asociado para determinar la dimensión del subespacio solución.

Escribimos el sistema homogéneo asociado $\begin{cases} 2x + 4z = 0 \\ -2y + 8z = 0 \end{cases}$ *, y resolvemos*

$\begin{cases} 2x + 4z = 0 \\ -2y + 8z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = \ \ 4z \end{cases} \Rightarrow$ *el conjunto solución es* $\boxed{S = \left\{(x;y;z) \in \Re^3 \ / \ x = -2z \wedge y = 4z\right\}}$

Escribimos un vector del conjunto solución que cumpla con las condiciones del conjunto:

$(x;y;z) = (-2z;4z;z) = z(-2;4;1)$

La base del subespacio solución es $B = \left\{(-2;4;1)\right\} \Rightarrow \boxed{DimS = 1}$

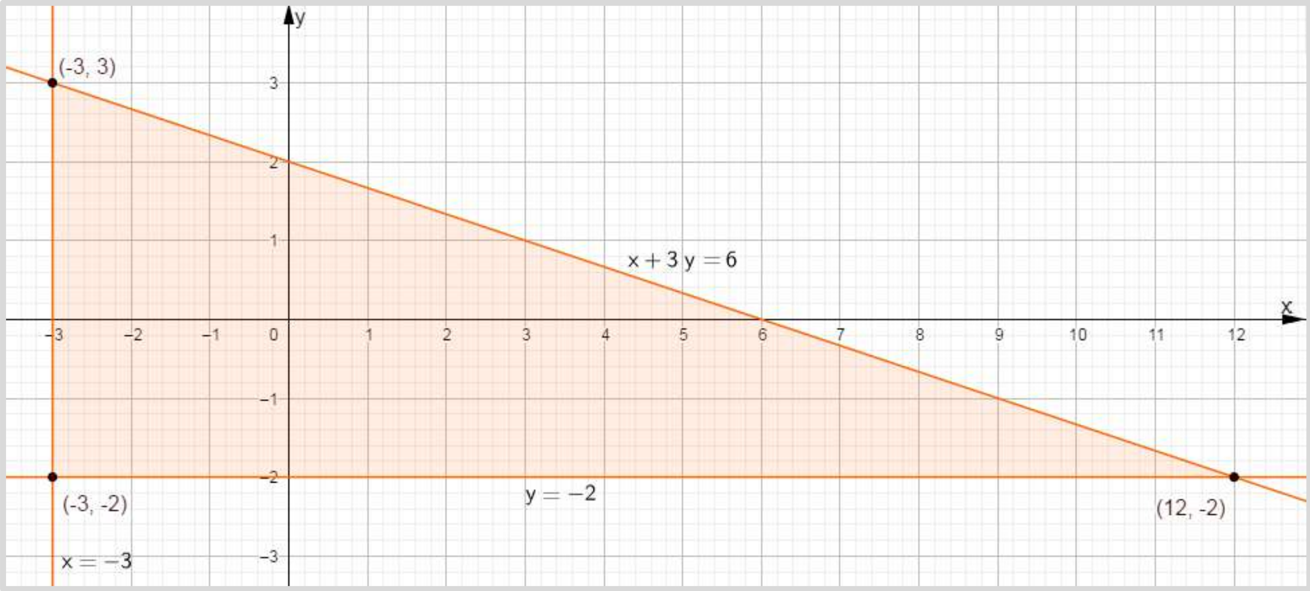
La respuesta correcta es la b)

✓ ***Ejercicio 7***

Se considera el recinto definido por las siguientes restricciones $\begin{cases} x+3y\leq 6 \\ x\geq -3 \\ y\geq -2 \end{cases}$. *Los vértices o puntos esquina de la zona de factibilidad son:*

- ☐ *a)* $(-3;-2),(-3;3),(12;-2)$
- ☐ *b)* $(-3;-2),(12;-2)$
- ☐ *c)* $(-3;-2),(-3;3)$
- ☐ *d)* $(-3;3),(12;-2)$

Representamos cada una de las inecuaciones y obtenemos la región de factibilidad



Señalamos los vértices

Los vértices son $\boxed{(-3;-2),(-3;3),(12;-2)}$

La respuesta correcta es la a)

✓ ***Ejercicio 8***

Señalar cuál de los siguientes conjuntos no es un subespacio de $\mathfrak{R}^3$

☐ *a)* $S=\left\{(x;y;z)\in\mathfrak{R}^3 \,/\, x+3y-z=4\right\}$

☐ *b)* $S=\left\{(x;y;z)\in\mathfrak{R}^3 \,/\, 2x-y=0\,,\,z=0\right\}$

☐ *c)* $S=\left\{(x;y;z)\in\mathfrak{R}^3 \,/\, x+y=0\,,\,z=y\right\}$

☐ *d)* $S=\left\{(x;y;z)\in\mathfrak{R}^3 \,/\, x-3y+8z=0\right\}$

El único conjunto que no es un subespacio de $\mathfrak{R}^3$ *es* $S=\left\{(x;y;z)\in\mathfrak{R}^3 \,/\, x+3y-z=4\right\}$ *ya que para que sea subespacio es necesario que el vector nulo pertenezca al conjunto S*

Si reemplazamos $(0;0;0)$ *en la condición* $x+3y-z=4$, *resulta* $0+3.0-0\overset{?}{=}4 \quad \therefore \quad 0=4$ *Absurdo*

Luego el vector nulo no pertenece al conjunto por lo tanto S no es un subespacio de $\mathfrak{R}^3$

La respuesta correcta es la a)

✓ *Ejercicio 9*

El conjunto de valores de $m \in \Re$ *para que los vectores del conjunto* $A = \{(m;3;1),(2;5;4),(1;4;3)\}$ *constituyan una base de* $\Re^3$ *es:*

- ☐ *a)* $\{-3\}$
- ☐ *b)* $\Re$
- ☐ *c)* $\Re - \{-3\}$
- ☐ *d)* $\varnothing$

Un conjunto de 3 vectores linealmente independientes de $\Re^3$ *constituyen una base de dicho espacio. Planteamos la combinación lineal de los vectores de la familia* $A = \{(m;3;1),(2;5;4),(1;4;3)\}$ *e igualamos al vector* $(0;0;0)$ *y determinamos cuál o cuáles son los valores de* $m \in \Re$*, para que la familia A sea una base del espacio* $\Re^3$

$$\alpha(m;3;1) + \beta(2;5;4) + \gamma(1;4;3) = (0;0;0)$$

Operando e igualando al vector nulo, resulta el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo

$$\begin{cases} m\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 5\beta + 4\gamma = 0 \\ \alpha + 4\beta + 3\gamma = 0 \end{cases}$$

Escribimos su matriz ampliada y resolvemos el determinante de la matriz de los coeficientes del sistema que deberá ser distinto de cero

$$\left(\begin{array}{ccc:c} m & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Desarrollamos el determinante por la primera fila por la Regla de Laplace

$$\begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = m.\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -m - 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -m - 3 \neq 0 \Rightarrow \boxed{m \neq -3}$$

Para que el conjunto A sea una base de $\Re^3, m \in \Re \wedge m \neq -3 \Rightarrow \boxed{m \in \Re - \{-3\}}$

La respuesta correcta es la c)

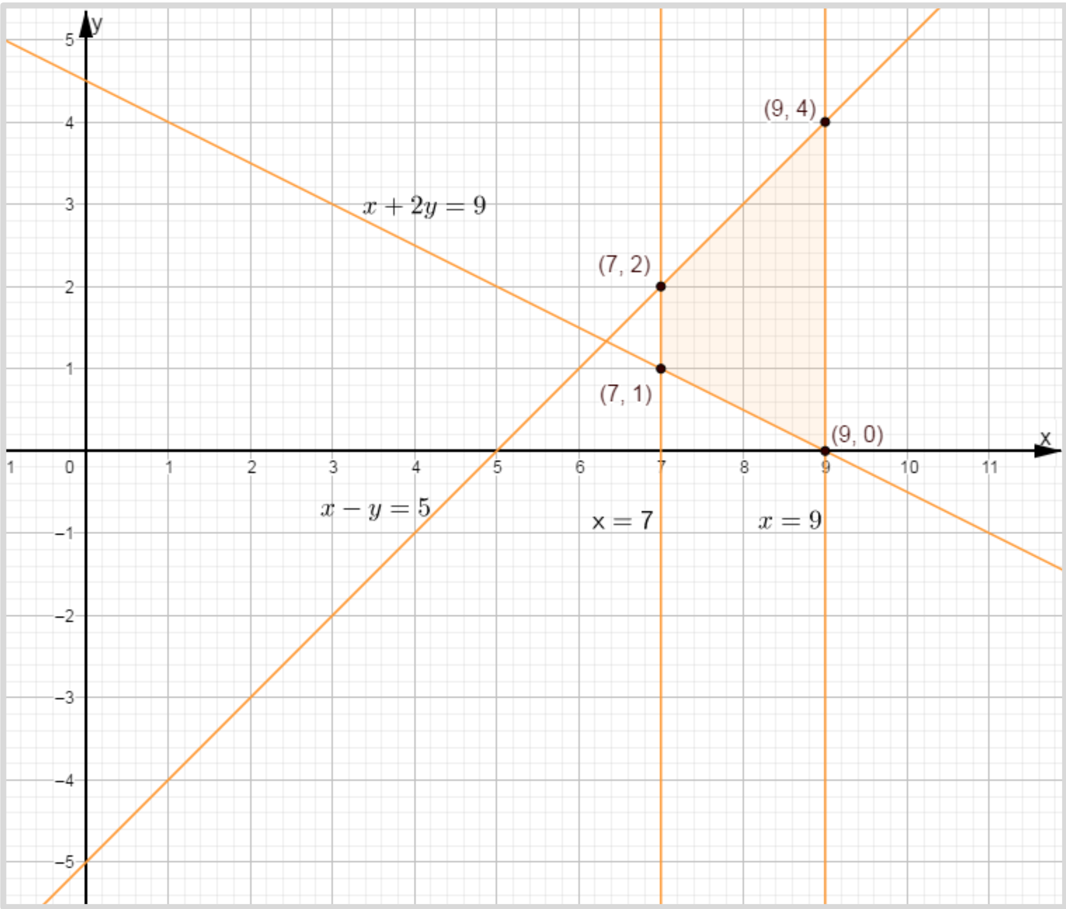
✓ ***Ejercicio 10***

Siendo R la región limitada por $\begin{cases} x+2y\geq 9 \\ x-\ \ y\geq 5 \\ \quad 7\leq x\leq 9 \end{cases}$ ***con*** $x,y\geq 0$, ***la función*** $Z=4x+2y$ ***alcanza un valor máximo y un valor mínimo en:***

☐ ***a)*** $Z_{Máx}=44$ ***en*** $(9;4)$ $\wedge$ $Z_{Mín}=30$ ***en*** $(7;1)$ ☐ ***b)*** $Z_{Máx}=36$ ***en*** $(9;0)$ $\wedge$ $Z_{Mín}=30$ ***en*** $(7;1)$

☐ ***c)*** $Z_{Máx}=32$ ***en*** $(7;2)$ $\wedge$ $Z_{Mín}=30$ ***en*** $(7;1)$ ☐ ***d)*** $Z_{Máx}=44$ ***en*** $(9;4)$ $\wedge$ $Z_{Mín}=36$ ***en*** $(9;0)$

Representamos las restricciones estructurales y las condiciones de no negatividad, hallamos los vértices y calculamos la función objetivo en cada uno de ellos buscando el que maximiza la función y el que la minimiza.



$Z(x;y)=4x+2y$

$\boxed{Z(7;1)=4.7+2.1=30}$ ***Mínimo***

$Z(7;2)=4.7+2.2=32$

$\boxed{Z(9;4)=4.9+2.4=44}$ ***Máximo***

$Z(9;0)=4.9+2.0=36$

La respuesta correcta es la a)